

## 1. Il piano iperbolico: modello del semipiano

### 1.1. La distanza iperbolica

Il modello del semipiano del piano iperbolico è lo spazio metrico

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

munito di una distanza  $d_{\mathbb{H}^2}$  definita nel modo seguente. Introduciamo la lunghezza iperbolica di una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  di classe  $C^1$  come

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) := \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Tale nozione si estende anche a curve  $C^1$  a tratti, suddividendo la curva in pezzi e sommando le lunghezze dei vari tratti. La distanza iperbolica tra due punti  $P$  e  $Q$  è definita allora come

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = \inf \{ \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \mid \gamma \text{ } C^1 \text{ a tratti connette } P \text{ e } Q \}.$$

**Lemma 1.1.1.** La funzione  $d_{\mathbb{H}^2}: \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una distanza.

Dim: Verifichiamo le proprietà di una distanza:

i)  $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) \geq 0$ , ovvia

ii)  $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{H}^2}(Q, P)$ , prendendo i cammini percorsi in senso opposto

iii)  $d_{\mathbb{H}^2}(P, R) \leq d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{H}^2}(Q, R) \quad \forall P, Q, R \in \mathbb{H}^2$

Sia  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Dalla definizione di distanza, esiste una curva

$C^1$  a tratti  $\gamma$  che connette  $P$  e  $Q$  tale che  $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \leq d_{\mathbb{H}^2}(P, Q)$

$+\frac{\varepsilon}{2}$  ed esiste una curva  $C^1$  a tratti  $\gamma'$  che connette  $Q$  ed  $R$

talché  $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma') \leq d_{\mathbb{H}^2}(Q, R) + \frac{\varepsilon}{2}$ . Concatenando i due cammini

otteniamo una curva  $\gamma''$   $C^1$  a tratti che connette  $P$  ed  $R$

□

tale che  $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma'') = \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) + \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma') \leq d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{H}^2}(Q, R) + \varepsilon$ .

Di conseguenza  $d_{\mathbb{H}^2}(P, R) \leq \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma'') \leq d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{H}^2}(Q, R) + \varepsilon$ . Per

l'arbitrarietà di  $\varepsilon > 0$ , deduciamo che  $d_{\mathbb{H}^2}(P, R) \leq d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) + d_{\mathbb{H}^2}(Q, R)$ .

iv)  $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) > 0$  se  $P \neq Q$ .

Dobbiamo mostrare che se  $P \neq Q$  non possiamo trovare cammini di lunghezza arbitrariamente piccola che connettono  $P$  e  $Q$ . Sia  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  un cammino  $C^1$  a tratti tale che  $\gamma(a) = P$  e  $\gamma(b) = Q$ . Distinguiamo due casi:

- se  $|\operatorname{Im}(\gamma(t))| \leq 2|\operatorname{Im}(P)| \quad \forall t \in [a, b]$  allora

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\operatorname{Im}(\gamma(t))|} dt \geq \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{2|\operatorname{Im}(P)|} dt = \frac{\ell(\gamma)}{2|\operatorname{Im}(P)|} \geq \frac{d_{\mathbb{R}^2}(P, Q)}{2|\operatorname{Im}(P)|}$$

- altrimenti  $\gamma$  interseca la retta  $y = 2|\operatorname{Im}(P)|$  e chiamiamo  $t_0$  il primo istante in cui questo avviene. Sia  $\gamma' = \gamma|_{[a, t_0]}$ . Allora, sfruttando il caso precedente, abbiamo che

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) \geq \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma') \geq \frac{d_{\mathbb{R}^2}(P, \gamma(t_0))}{2|\operatorname{Im}(P)|} \geq \frac{1}{2}$$

Deduciamo che

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) \geq \min \left\{ \frac{d_{\mathbb{R}^2}(P, Q)}{2|\operatorname{Im}(P)|}, \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

## 1.2 Alcune isometrie del piano iperbolico

Ricordiamo che una mappa  $\varphi: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  è un'isometria se

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{H}^2}(\varphi(P), \varphi(Q)) \quad \forall P, Q \in \mathbb{H}^2$$

Elenciamo alcune isometrie del piano iperbolico:



i) Le omotetie  $\varphi(z) = \lambda z$  con  $\lambda > 0$ . Queste mappe preservano la lunghezza

iperbolica. Infatti per ogni  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  C' a tratti abbiamo

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{|\lambda \gamma'(t)|}{\lambda \text{Im}(\gamma(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{|(\varphi \circ \gamma)'(t)|}{\text{Im}(\varphi(\gamma(t)))} dt = \ell_{\mathbb{H}^2}(\varphi(\gamma)) \end{aligned}$$

ii) Le traslazioni orizzontali  $\varphi(z) = z + \lambda$ , con  $\lambda \in \mathbb{R}$ , preservano la

lunghezza iperbolica dato che  $(\varphi \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t)$  e  $\text{Im}(\gamma(t)) = \text{Im}(\varphi(\gamma(t)))$

iii) La riflessione lungo l'asse immaginario  $\varphi(x, y) = (-x, y)$ .

**Proposizione 1.2.1.** Il piano iperbolico è uno spazio omogeneo, ovvero per ogni coppia di punti  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  esiste un'isometria  $\varphi$  tale che  $\varphi(P) = Q$ .

Dim: Sia  $P = a + ib$  e  $Q = c + id$  con  $b, d > 0$ . L'omotetia  $\varphi(z) = \frac{d}{b}z$  manda

il punto  $P$  nel punto  $R = \frac{ad}{b} + id$ . La traslazione orizzontale

$\psi(z) = z + c - \frac{ad}{b}$  manda  $R$  in  $Q$ . Quindi la mappa  $\psi \circ \varphi$  è

l'isometria cercata.

Definiamo ora l'inversione lungo la circonferenza unitaria

$$\varphi(z) = \frac{z}{|z|^2}$$

In coordinate polari, osserviamo che  $\varphi(r, \theta) = (\frac{1}{r}, \theta)$  per cui i punti lungo

la circonferenza unitaria rimangono fissi mentre l'interno e l'esterno della

circonferenza unitaria vengono invertiti.

**Lemma 1.2.2.** L'inversione lungo la circonferenza unitaria è un'isometria di  $\mathbb{H}^2$ .

Dim: Mostriamo che  $\varphi$  preserva la lunghezza iperbolica di curve. Sia

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  una curva  $C^1$  a tratti. Osserviamo che

$$(\varphi \circ \gamma)(t) = \frac{z(t)}{|z(t)|^2} \quad (\varphi \circ \gamma)'(t) = \frac{z'(t)|z(t)|^2 - 2\operatorname{Re}(z'(t)\bar{z}(t))z(t)}{|z(t)|^4}$$

Quindi, scrivendo  $z(t) = x(t) + iy(t)$  e  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ , semplici conti mostrano che  $|(\varphi \circ \gamma)'(t)| = \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)|^2}$  e  $\operatorname{Im}((\varphi \circ \gamma)(t)) = \frac{\operatorname{Im}(\gamma(t))}{|\gamma(t)|^2}$

da cui ricaviamo

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\varphi \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|(\varphi \circ \gamma)'(t)|}{\operatorname{Im}((\varphi \circ \gamma)(t))} dt = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt = \ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma)$$

### 1.3 Geodetiche del piano iperbolico

Una curva  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  è una geodetica se per ogni  $P \in \gamma$  e per ogni  $Q \in \gamma$  la porzione di  $\gamma$  che collega  $P$  a  $Q$  realizza la distanza iperbolica tra  $P$  e  $Q$ . Vogliamo determinare le geodetiche del piano iperbolico. Iniziamo da un caso particolare:

**Lemma 1.3.1** Se  $P = x_0 + iy_0$  e  $Q = x_0 + iy_1$  si trovano sulla stessa retta verticale, allora la geodetica che connette  $P$  e  $Q$  è il segmento verticale  $\bar{\gamma}(t) = x_0 + it \quad t \in [y_0, y_1]$ . Inoltre  $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = \left| \log\left(\frac{y_1}{y_0}\right) \right|$

Dim: Assumiamo che  $y_0 \leq y_1$ . Iniziamo a calcolare la lunghezza di  $\bar{\gamma}$

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\bar{\gamma}) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{t} dt = \log\left(\frac{y_1}{y_0}\right)$$

Consideriamo, ora, un qualsiasi altro cammino  $\gamma$  di classe  $C^1$  a tratti che connette  $P$  e  $Q$ . Allora

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt \geq \int_a^b \frac{|\operatorname{Im}(\gamma'(t))|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt \geq \int_a^b \frac{|\operatorname{Im}(\gamma'(t))|}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} dt$$

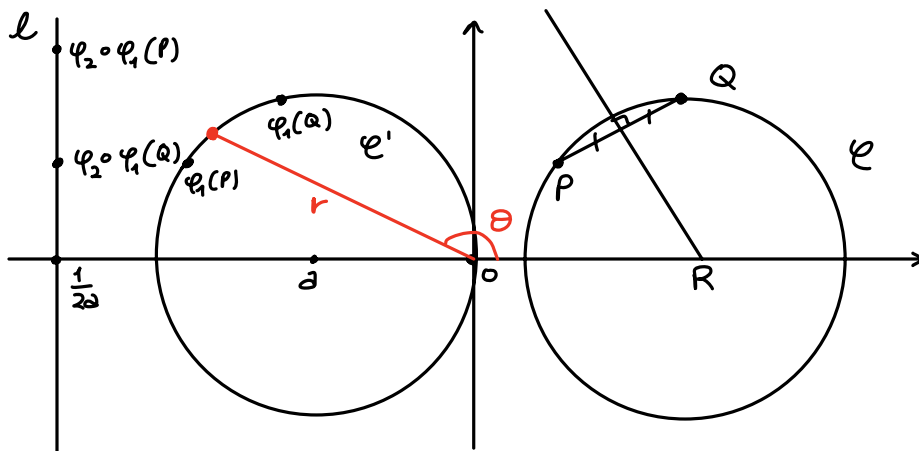
$$= \log \left( \frac{\operatorname{Im}(\gamma(b))}{\operatorname{Im}(\gamma(a))} \right) = \log \left( \frac{y_1}{y_0} \right)$$

Osserviamo inoltre che tutte le disuguaglianze sono strette a meno che  $\gamma(t)$  sia un segmento verticale.

Con lo stesso ragionamento si mostra che se  $P = x_0 + iy_0$  e  $Q = x_1 + iy_1$  allora  $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) \geq \left| \log \left( \frac{y_1}{y_0} \right) \right|$ .

**Lemma 1.3.2** Per ogni coppia di punti  $P, Q \in \mathbb{H}^2$  che non si trovano sulla stessa retta verticale, esiste un'isometria  $\varphi$  del piano iperbolico tale che  $\varphi(P)$  e  $\varphi(Q)$  si trovano sulla stessa retta verticale. Inoltre il segmento verticale che connette  $\varphi(P)$  e  $\varphi(Q)$  è l'immagine tramite  $\varphi$  dell'unica circonferenza centrata sull'asse reale passante per  $P$  e  $Q$ .

Dim:



$$r = 2a \cos \theta$$

Siccome  $P$  e  $Q$  non giacciono sulla stessa retta verticale, la perpendicolare al segmento  $\overline{PQ}$  passante per il punto medio interseca l'asse reale in un punto  $R$ . I punti  $P$  e  $Q$  sono equidistanti da  $R$  nella metrica Euclidea, per cui esiste una circonferenza  $E$  di centro  $R$  passante per  $P$  e  $Q$ . Sia  $\varphi_1$  la traslazione orizzontale che manda

$\ell$  è in una circonferenza  $\ell'$  passante per l'origine. Sia  $o$  il centro della circonferenza  $\ell'$ . L'immagine di  $\ell'$  tramite l'inversione  $\varphi_2$  lungo la circonferenza unitaria è la retta verticale  $x = \frac{1}{2o}$ .

La composizione  $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$  è dunque un'isometria che manda l'arco di circonferenza centrato sull'asse reale passante per  $P$  e  $Q$  nel segmento verticale che connette  $\varphi(P)$  e  $\varphi(Q)$ .

**Oss** D'ora in avanti penseremo a rette verticali come circonferenze centrate sull'asse reale di raggio infinito. In effetti, la retta verticale  $x = a$  si può vedere come il limite per  $x \rightarrow +\infty$  della circonferenza di raggio  $|x-a|$  centrata nel punto  $x$ .

**Teorema 1.3.3** Dati  $P, Q \in \mathbb{H}^2$ ,  $\ell'$  arco di circonferenza centrato sull'asse reale passante per  $P$  e  $Q$  è l'unica geodetica del piano iperbolico che connette  $P$  e  $Q$ .

**Dim:** Abbiamo già dimostrato l'enunciato se  $P$  e  $Q$  stanno sulla stessa retta verticale. Il caso generale segue dal fatto che le isometrie mandano geodetiche in geodetiche e abbiamo visto nel lemma precedente che  $\ell'$  immagine di un segmento verticale tramite l'isometria  $\varphi^{-1}$  è un arco di circonferenza passante per  $P$  e  $Q$  centrato sull'asse reale.

**Def** Una geodetica  $\gamma$  si dice completa se non può essere estesa a una geodetica più lunga.

**Oss** Dal Teorema 1.3.3 deduciamo che le geodetiche complete del piano

iperbolico sono semicirconferenze centrate sull'asse  $x$ .

**Lemma 1.3.4** Siano  $P_0 = (0, y_0)$  e  $P_1 = (0, y_1)$  punti del piano iperbolico con  $y_1 > y_0$ .

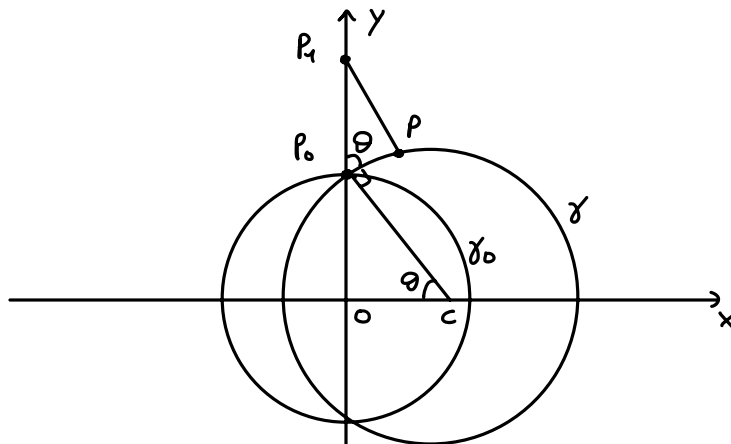
Sia  $\gamma$  una geodetica completa passante per  $P_0$ . Allora sono equivalenti:

- i)  $P_0$  è il punto di  $\gamma$  più vicino a  $P_1$ .
- ii)  $\gamma$  è la geodetica completa ortogonale all'asse  $y$ , ovvero  $\gamma$  è la semicir-  
conferenza centrata in  $(0,0)$  e raggio  $y_0$ .

Dim: Sia  $\gamma_0$  la geodetica ortogonale all'asse  $y$  e di raggio  $y_0$ . Dai Lemmi 1.3.1 e 1.3.2 sappiamo che per ogni  $P = (\mu, \nu) \in \gamma_0$  vale che

$$d_{H^2}(P_1, P) \geq \log\left(\frac{y_1}{\nu}\right) \geq \log\left(\frac{y_1}{y_0}\right) = d_{H^2}(P_1, P_0)$$

Quindi  $P_0$  è il punto di  $\gamma_0$  più vicino a  $P_1$ .



Sia  $\gamma$  un'altra geodetica completa passante per  $P_0$  che forma un angolo  $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$  con  $\gamma_0$ . Mostriamo che esiste  $P \in \gamma$  tale che  $d_{H^2}(P, P_1) < d_{H^2}(P_1, P_0)$ .

Sia  $P = (\mu, \nu) \in \gamma$  e sia  $\sigma(t) = (\mu t, \nu t + (1-t)y_1)$  il segmento che connette  $P$  e  $P_1$ . Allora

$$l_{H^2}(\sigma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\mu^2 + (\nu - y_1)^2}}{y_1 + t(\nu - y_1)} dt = \frac{\sqrt{\mu^2 + (\nu - y_1)^2}}{y_1 - \nu} \log\left(\frac{y_1}{\nu}\right)$$

Facciamo variare  $(\mu, \nu)$  lungo  $\gamma$  vicino a  $P_0$ . Osserviamo che per  $\square$

$u=0$  abbiamo  $v=y_0$  e  $\frac{dv}{du} = \cot(\theta)$  in  $u=0$ : infatti

$\gamma(u) = (u, \sqrt{R^2 - (u-c)^2})$  dove  $(c,0)$  è il centro di  $\gamma$

$$\left. \frac{dv}{du} \right|_{u=0} = \frac{c}{y_0} = \cot(\theta)$$

Quindi  $\left. \frac{d}{du} \ell_{\mathbb{H}^2}(\sigma) \right|_{u=0} = - \frac{v'(0)}{v(0)} = - \frac{\cot(\theta)}{y_0}$ . In particolare, siccome  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ,

esiste un punto  $P = (u, v)$  vicino a  $P_0$  tale che

$$d_{\mathbb{H}^2}(P, P_1) \leq \ell_{\mathbb{H}^2}(\sigma) \leq \ell_{\mathbb{H}^2}(\sigma_0) = d_{\mathbb{H}^2}(P_0, P_1)$$

dove  $\sigma_0$  è il segmento che connette  $P_0$  e  $P_1$ .

#### 1.4 Tutte le isometrie del piano iperbolico

Fino a ora abbiamo visto tre tipi di isometrie del piano iperbolico: omotetie, traslazioni orizzontali e inversioni.

**Lemma 1.4.1** Tutte le mappe della forma

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad-bc=1$$

$$\psi(z) = \frac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad-bc=1$$

sono isometrie del piano iperbolico.

Dim: Mostriamo che tutte le mappe  $\varphi$  e  $\psi$  come sopra sono composizioni di traslazioni orizzontali, omotetie e inversioni. Questo è sufficiente per concludere dato che composizione di isometrie è un'isometria.

Se  $a \neq 0$  allora  $\varphi(z)$  è la composizione di:

$$z \mapsto z + \frac{b}{a} \quad z \mapsto \frac{1}{z} \quad z \mapsto \frac{1}{a^2} z \quad z \mapsto z + \frac{c}{a}$$

Per ottenere  $\varphi(z)$  basta comporre ulteriormente con  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

Quando  $a=0$  allora  $c \neq 0$  allora  $\varphi$  è composizione di:

$$z \mapsto \frac{cz + b + d}{cz + d} \quad \text{e} \quad z \mapsto z - 1$$

Per ottenere  $\varphi(z)$  basta comporre ulteriormente con l'isometria  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .

**Lemma 1.4.2** Sia  $\varphi$  un'isometria del piano iperbolico tale che  $\varphi(iy) = iy$  per ogni  $y > 0$ . Allora  $\varphi(z) = z \quad \forall z \in \mathbb{H}^2$  oppure  $\varphi(z) = -\bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{H}^2$

Dim: Sia  $\gamma$  la semiasse  $y$  con  $y > 0$ . Per ogni  $iy \in \gamma$ , sia  $\gamma_y$  la geodetica passante per  $iy$  e ortogonale a  $\gamma$ . Siccome  $\varphi$  è un'isometria e  $\varphi(iy) = iy$ , l'immagine  $\varphi(\gamma_y)$  deve essere una geodetica completa passante per  $iy$ . Per il Lemma 1.3.4, per ogni  $y_1 > y$  il punto  $iy$  è il punto di  $\gamma_y$  più vicino a  $iy_1$ . Di conseguenza,  $iy = \varphi(iy)$  è il punto di  $\varphi(\gamma_y)$  più vicino a  $\varphi(iy_1) = iy_1$  poiché  $\varphi$  è un'isometria. Per il Lemma 1.3.4, concludiamo che  $\varphi(\gamma_y) = \gamma_y$ .

Ora, se  $P = u + iv \in \gamma_y$ , la sua immagine  $\varphi(P)$  è un punto a distanza  $d_{\mathbb{H}^2}(P, iy)$  da  $iy$  appartenente alla geodetica  $\gamma_y$ . Sono due i punti con tale proprietà:  $P$  e  $-\bar{u} + iv$ .

Nel primo caso  $\varphi(z) = z$  e nel secondo caso  $\varphi(z) = -\bar{z}$ . Per continuità tali formule valgono  $\forall z \in \mathbb{H}^2$ .

Le mappe  $\varphi$  e  $\psi$  del Lemma 1.4.1 si possono estendere per continuità sull'asse reale ponendo

$$\varphi: \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$\begin{array}{ccc} x & \longmapsto & \frac{ax+b}{cx+d} \quad x \neq -\frac{d}{c} \\ -\frac{d}{c} & \longmapsto & \infty \\ \infty & \longmapsto & \frac{a}{c} \end{array}$$

e analogamente per  $\psi$ .  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  è detto il bordo all'infinito di  $\mathbb{H}^2$ .

**Teorema 1.4.3** Le isometrie del piano iperbolico sono esattamente le mappe della forma

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc = 1$$

$$\psi(z) = \frac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad ad - bc = 1$$

Dim: Abbiamo già mostrato che ogni mappa di questo tipo è un'isometria.

Sia  $\varphi$  un'isometria arbitraria di  $\mathbb{H}^2$  e sia  $\gamma$  la parte positiva dell'asse  $y$ . Siccome  $\gamma$  è una geodetica completa, anche  $\varphi(\gamma)$  lo è, per cui sarà una semicirconferenza Euclidea che interseca  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  in due punti  $u, v$ . Orientiamo  $\gamma$  da 0 a  $\infty$  e  $\varphi(\gamma)$  da  $u$  a  $v$ .

Supponiamo che  $u, v \neq \infty$ . L'isometria

$$\varphi(z) = \frac{az - au}{cz - cv} \quad ac(u-v) = 1 \quad a, c \in \mathbb{R}$$

manda  $u$  in 0 e  $v$  in  $\infty$ . Quindi  $\varphi \circ \varphi$  fissa 0 e  $\infty$ .

Di conseguenza, l'isometria  $\varphi \circ \varphi$  fissa  $\gamma$  (come insieme) e ne

preserva l'orientazione. Quindi  $\varphi(\varphi(i)) = it$  con  $t > 0$ . Rimpiazzando

$a$  con  $\frac{a}{\sqrt{t}}$  e  $c$  con  $c\sqrt{t}$  possiamo fare in modo che  $\varphi(\varphi(i)) = i$



Quindi  $\psi(\varphi(iy)) = iy \quad \forall y > 0$  e per il Lemma 1.4.2  $\psi(\varphi(z)) = z$   
oppure  $\psi(\varphi(z)) = -\bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{H}^2$ . Nel primo caso

$$\varphi(z) = \psi^{-1}(z) = \frac{-cz + a}{-cz + a}$$

Nel secondo caso

$$\varphi(z) = \psi^{-1}(-\bar{z}) = \frac{c\bar{z} + a}{c\bar{z} + a}$$

In entrambi i casi  $\varphi$  è del tipo richiesto.

Se  $u = \infty$ , l'argomento è analogo usando  $\psi(z) = \frac{-a}{cz - cu}$  con  $ac = 1$

e se  $v = \infty$  basta usare  $\psi(z) = \frac{az - au}{c}$  con  $ac = 1$ .

Osserviamo che il gruppo di isometrie di  $\mathbb{H}^2$  che preservano l'orientazione si può identificare con  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tramite l'associazione

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

Si verifica, infatti, facilmente che la composizione di isometrie corrisponde alla moltiplicazione delle matrici associate, per cui la mappa definita sopra è un isomorfismo di gruppi.

**Def** [Classificazione delle isometrie di  $\mathbb{H}^2$ ] Un'isometria  $\varphi$  di  $\mathbb{H}^2$  si dice

- loxodromica, se  $\varphi$  fissa esattamente due punti in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- parabolica, se  $\varphi$  fissa esattamente un punto in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- ellittica, se  $\varphi$  fissa un punto in  $\mathbb{H}^2$

**Teorema 1.4.4** Ogni isometria  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad-bc=1$  è loxodromica, parabolica, ellittica o è l'identità. In particolare,

- i)  $\varphi$  è loxodromica se  $|a+d| > 2$ . In tal caso esiste un'isometria  $\psi$  di  $\mathbb{H}^2$  tale che  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$  è l'omotetia  $z \mapsto \lambda z$ ,  $\lambda > 0$ .
- ii)  $\varphi$  è parabolica se  $|a+d| = 2$  e  $\varphi \neq \text{id}$ . In tal caso esiste un'isometria  $\psi$  di  $\mathbb{H}^2$  tale che  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}$  è la traslazione orizzontale  $z \mapsto z+1$ .
- iii)  $\varphi$  è ellittica se  $|a+d| < 2$ . In tal caso esiste un'isometria  $\psi$  di  $\mathbb{H}^2$  tale che  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{z \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)}{-z \sin(\theta/2) + \cos(\theta/2)}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Dim: Identifichiamo l'isometria  $\varphi$  con la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Il suo polinomio caratteristico è  $t^2 - (a+d)t + 1$  che ha  $\Delta = (a+d)^2 - 4$ .

- i) se  $|a+d| > 2$ , allora il polinomio caratteristico ha radici reali distinte  $\mu$  e  $\frac{1}{\mu}$ . La matrice è dunque coniugata a  $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix}$ , ovvero esiste  $\psi$  tale che  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{\mu z}{\mu^{-1}} = \mu^2 z = \lambda z$ .

L'omotetia  $z \mapsto \lambda z$  ha esattamente due punti fissi  $0$  e  $\infty$ , quindi  $\varphi$  fissa  $\varphi(0)$  e  $\varphi(\infty)$ .

- ii) se  $|a+d| = 2$ , il polinomio caratteristico è  $(t-1)^2$ . Siccome  $\varphi \neq \text{id}$ , la matrice è coniugata a  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , ovvero esiste  $\psi$  tale che  $\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(z) = z+1$ . La traslazione orizzontale  $z \mapsto z+1$  fissa solo  $\infty$ , quindi  $\varphi$  fissa solo  $\varphi(\infty)$ .

- iii) se  $|a+d| < 2$ , il polinomio caratteristico ha radici complesse

coniugate di modulo 1, ovvero della forma  $e^{i\alpha}$ . La matrice è dunque coniugata in  $SL(2, \mathbb{R})$  alla matrice  $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ .

Esiste allora un'isometria  $\varphi$  tale che  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(z) =$

$$\frac{z \cos \alpha + \sin \alpha}{-z \sin \alpha + \cos \alpha}. \text{ Per concludere basta porre } \alpha = \frac{\pi}{2}. \text{ Osserviamo}$$

poi che questa isometria fissa solo il punto  $i \in \mathbb{H}^2$  dato che

$$z = \frac{z \cos \alpha + \sin \alpha}{-z \sin \alpha + \cos \alpha} \Rightarrow -z^2 \sin \alpha + z \cos \alpha = z \cos \alpha + \sin \alpha \Rightarrow z = i \quad z \in \mathbb{H}^2$$

quindi  $\varphi$  fissa solo  $\varphi(i)$ .

## 1.5 Trasformazioni di Möbius

Denotiamo con  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  la sfera di Riemann. Una trasformazione di Möbius è una mappa  $\varphi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  della forma  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad-bc \neq 0$ . Un'anti-trasformazione di Möbius è una mappa  $\psi: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  della forma  $\psi(z) = \frac{c\bar{z}+d}{a\bar{z}+b}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  e  $ad-bc \neq 0$ .

**Lemma 1.5.1** Ogni (anti)-trasformazione di Möbius è composizione di omotetie ( $z \mapsto \lambda z$ ), traslazioni ( $z \mapsto z+z_0$ ), rotazioni ( $z \mapsto e^{i\theta} z$ ) e inversioni ( $z \mapsto \bar{z}^{-1}$ ).

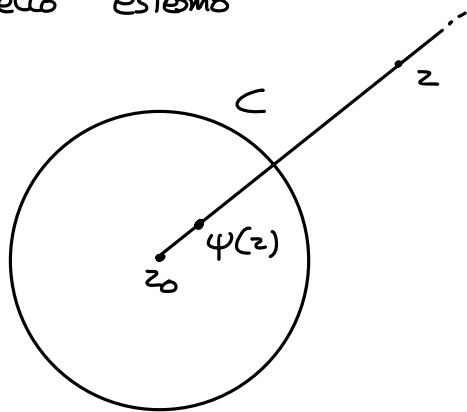
Dim: è analoga a quella del Lemma 1.4.1 e lasciata per esercizio

**Oss** Le trasformazioni di Möbius formano un gruppo isomorfo a  $PSL(2, \mathbb{C})$  associando  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . 113

Tra le (anti)-trasformazioni di Möbius è importante ricordare l'inversione lungo la circonferenza  $C$  di centro  $z_0 \in \mathbb{C}$  e raggio  $R$  data da

$$\psi(z) = z_0 + R^2 \frac{z - z_0}{|z - z_0|^2} = \frac{z_0/R \bar{z} + (R^2 - |z_0|^2)/R}{1/R \bar{z} - z_0/R}$$

$\psi$  manda il punto  $z \in \mathbb{C}$  nel punto sulla semiretta per  $z_0$  e  $z$  a distanza  $R^2/d(z, z_0)$  da  $z_0$ . Quindi  $\psi$  fissa tutti i punti di  $C$  e inverte il disco interno con quello esterno



È interessante osservare cosa succede se il centro della circonferenza tende a  $\infty$ . Scriviamo  $z_0 = te^{i\theta_0}$  e  $R = t - t_0$  e facciamo tendere  $t \rightarrow +\infty$ .

La circonferenza  $C$  tende alla retta passante per il punto  $t_0 e^{i\theta_0}$  e che forma un angolo di  $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$  con l'asse  $x$ . La mappa  $\psi(z)$  converge a  $\psi(z) = -e^{2i\theta_0} \bar{z} + 2t_0 e^{i\theta_0}$ , che è esattamente la riflessione lungo tale retta. Se interpretiamo le rette come circonferenze passanti per  $\infty$  allora le riflessioni lungo le rette sono esattamente inversioni lungo circonferenze passanti per  $\infty$ .

**Proposizione 1.5.2** Una (anti)-trasformazione di Möbius manda circonferenze di  $\hat{\mathbb{C}}$  in circonferenze di  $\hat{\mathbb{C}}$ .

Dim: Siccome ogni (anti)-trasformazione di Möbius è composizione di omote-  
 tie, traslazioni, rotazioni e inversioni lungo la circonferenza unitaria e  
 le prime tre mandano chiaramente circonferenze in circonferenze, ba-  
 sta mostrare l'enunciato per  $\varphi(z) = \frac{1}{z}$ .

In coordinate polari, la circonferenza di raggio  $R$  centrata nel punto  
 $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$  ha equazione  $r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0$ . L'inversione  
 $\varphi$  manda un punto di coordinate polari  $(r, \theta)$  nel punto di coordi-  
 nate  $(\frac{1}{r}, \theta)$ , quindi è immagine della circonferenza scritta prima  
 e' la curva di equazione  $\frac{1}{r^2} - \frac{2r_0}{r} \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0$ .

• se  $R \neq r_0$  allora

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2r_0}{r} \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - R^2 = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0) + r^2(r_0^2 - R^2) = 0 \Rightarrow$$

$$r^2 - 2r \frac{r_0}{r_0^2 - R^2} \cos(\theta - \theta_0) + \frac{r_0^2}{(r_0^2 - R^2)^2} - \frac{R^2}{(r_0^2 - R^2)^2} = 0$$

è la circonferenza di raggio  $\frac{R}{|r_0^2 - R^2|}$  centrata in  $\frac{z_0}{r_0^2 - R^2}$ .

• se  $R = |z_0|$  allora otteniamo  $r = \frac{1}{2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}$  che è una retta,  
 ovvero una circonferenza per  $\infty$ .

Inoltre è immagine tramite  $\varphi$  di una retta di equazione  $r = \frac{1}{2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}$

è la curva di equazione  $\frac{1}{r} = \frac{1}{2r_0 \cos(\theta - \theta_0)} \Rightarrow r = 2r_0 \cos(\theta - \theta_0)$  che

è una circonferenza passante per l'origine.

Proposizione 1.5.3 Sia  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Allora se  $z_0 \neq -\frac{d}{c}$

abbiamo

$$d\varphi_{z_0}(v) = \frac{ad-bc}{(cz_0+d)^2} v$$

Dim: Sia  $z(t) = z_0 + tv$ . Allora

$$\begin{aligned} d\varphi_{z_0}(v) &= \left. \frac{d}{dt} (\varphi(z(t))) \right|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(z(h)) - \varphi(z(0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{az_0 + ahv + b}{cz_0 + chv + d} - \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \frac{(az_0 + b)(cz_0 + d) + ahv(cz_0 + d) - (az_0 + b)(cz_0 + chv + d)}{(cz_0 + d)(cz_0 + chv + d)} \right) \\ &= \frac{(ad-bc)v}{(cz_0 + d)^2} \end{aligned}$$

Siccome il differenziale di una trasformazione di Möbius è dato dalla moltiplicazione per un numero complesso, esso preserva l'angolo e l'orientazione tra due vettori tangenti; non preserva però la norma Euclidea dei vettori.

## 1.6 La norma iperbolica

Sia  $v \in T_z \mathbb{H}^2$ . Definiamo la norma iperbolica di  $v$  come

$$\|v\|_{\mathbb{H}^2} := \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |v|$$

**Lemma 1.6.1** Se  $\varphi$  è un'isometria del piano iperbolico, allora  $\|d\varphi_z(v)\|_{\mathbb{H}^2} = \|v\|_{\mathbb{H}^2}$  per ogni  $v \in T_z \mathbb{H}^2$ .

Dim: Supponiamo che  $\varphi$  preservi l'orientazione (l'altro caso è analogo).

Possiamo scrivere  $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $ad-bc=1$ .

Per la Proposizione 1.5.3 abbiamo che  $|d\varphi_z(v)| = \frac{1}{|cz+d|^2} |v|$ .

D'altra parte,

$$\operatorname{Im}(\varphi(z)) = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial z + b}{cz + d} - \frac{\partial \bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{2i} \left( \frac{z - \bar{z}}{|cz + d|^2} \right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Dunque,

$$\|d\varphi_z(v)\|_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{\operatorname{Im}(\varphi(z))} |v| = \frac{|v|}{\operatorname{Im}(z)} = \|v\|_{\mathbb{H}^2}$$

**Proposizione 1.6.2** Sia  $v_1 \in T_{z_1}\mathbb{H}^2$  e  $v_2 \in T_{z_2}\mathbb{H}^2$  con  $\|v_1\|_{\mathbb{H}^2} = \|v_2\|_{\mathbb{H}^2}$ .

Allora esiste un'isometria  $\varphi$  del piano iperbolico tale che  $\varphi(z_1) = z_2$  e  $d\varphi_{z_1}(v_1) = v_2$ .

Dim: Trasportiamo  $v_1$  nel punto  $z_2$  con una traslazione Euclidea e sia  $\theta$  l'angolo tra i due vettori così ottenuti.

Scriviamo  $z_1 = x_1 + iy_1$  e prendiamo  $c = -\frac{1}{y_1} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  e  $d = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{x_1}{y_1} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  in modo tale che  $cz_1 + d = e^{-i\theta/2}$ . Scegliamo poi  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $ad - bc = 1$ .

Sia  $\varphi(z) = \frac{\partial z + b}{cz + d}$  e' isometria di  $\mathbb{H}^2$  costruita a partire da questi dati. Per la Proposizione 1.5.3,  $d\varphi_{z_1}$  agisce moltiplicando  $v_1$  per  $e^{i\theta}$ , di conseguenza  $v_3 = d\varphi_{z_1}(v_1)$  e' parallelo a  $v_2$  e con lo stesso verso. Sia  $z_3 = \varphi(z_1)$  e sia  $\psi$  un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  che manda  $z_3$  in  $z_2$ . Dalla dimostrazione della Proposizione 1.2.1 sappiamo che possiamo scegliere  $\psi$  in modo che sia composizione di una omotetia e di una traslazione orizzontale. In particolare,  $d\psi_{z_3}$  preserva il parallelismo di vettori.

Consideriamo allora  $F = \psi \circ \varphi$ . Osserviamo che  $F(z_1) = z_2$  e  $\square$

$d\mathbb{F}_{z_1}(v_1) = d\psi_{z_3} \circ d\varphi_{z_1}(v_1) = d\psi_{z_3}(v_3) = v_2$  perché è un vettore in  $T_{z_2}\mathbb{H}^2$  parallelo a  $v_2$ , con lo stesso verso e la stessa norma.

Diciamo allora che il piano iperbolico è isotropo.

Oss: Se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  è  $C^1$  a tratti allora  $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{H}^2} dt$ .



## 2. Il modello del disco

Sia  $B^2$  la palla unitaria di  $\mathbb{R}^2$  di centro  $(0,0)$  e raggio 1. Definiamo una norma su  $T_z B^2$  come

$$\|v\|_{B^2} = \frac{2}{1-|z|^2} |v| \quad v \in T_z B^2$$

Questa permette di definire una nuova nozione di lunghezza per curve

$C^1$  a tratti:  $\gamma: [a,b] \rightarrow B^2$  tramite la formula

$$L_B(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{B^2} dt$$

da cui poi si ottiene una distanza tra due punti  $P, Q \in B^2$  prendendo e' estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve  $C^1$  a tratti che connettono  $P$  e  $Q$ . Denotiamo con  $d_B$  questa distanza.

**Proposizione 2.1**  $(B^2, d_B)$  e' isometrico a  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$ .

Dim: Consideriamo la mappa  $\Phi: \mathbb{H}^2 \rightarrow B^2$  definita dalla formula

$$\Phi(z) = \frac{-z+i}{z+i}. \text{ Osserviamo che } |\Phi(z)| = 1 \quad \forall z \in \mathbb{R} \text{ e } \Phi(i) = 0$$

per cui, per continuita'  $\Phi(\mathbb{H}^2) \subseteq B^2$ . Inoltre  $\Phi$  e' invertibile con

$$\text{inversa } \Phi^{-1}(w) = \frac{-iw+i}{w+i}.$$

Dalla Proposizione 1.5.3 sappiamo che

$$\begin{aligned} \|d\Phi_z(v)\|_{B^2} &= \frac{2}{1-|\Phi(z)|^2} |d\Phi_z(v)| \\ &= \frac{2}{1 - \left| \frac{-z+i}{z+i} \right|^2} \left| \frac{-2i}{(z+i)^2} v \right| \\ &= \frac{4}{|z+i|^2 - |-z+i|^2} |v| = \frac{1}{\operatorname{Im}(z)} |v| \\ &= \|v\|_{\mathbb{H}^2} \end{aligned}$$

Da questo deduciamo che se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$  è una curva  $C^1$  a tratti, allora  $\Phi(\gamma)$  è una curva  $C^1$  a tratti in  $\mathbb{B}^2$  tale che  $\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \ell_{\mathbb{B}^2}(\Phi(\gamma))$ . Siccome questo vale per ogni curva, concludiamo che  $d_{\mathbb{H}^2}(P, Q) = d_{\mathbb{B}^2}(\Phi(P), \Phi(Q)) \quad \forall P, Q \in \mathbb{H}^2$ , ovvero  $\Phi$  è un'isometria tra i due modelli.

**Proposizione 2.2.** Le geodetiche di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  sono archi di circonferenza ortogonali a  $S^1 = \partial\mathbb{B}^2$  e segmenti euclidei passanti per l'origine.

Dim: Siccome la mappa  $\Phi$  definita nella Proposizione 2.1 è un'isometria, essa manda geodetiche in geodetiche. Poiché  $\Phi$  è una trasformazione di Möbius, per la Proposizione 1.5.2 manda circonferenze in circonferenze e preserva l'ortogonalità (Proposizione 1.5.3). Siccome  $\Phi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1 = \partial\mathbb{B}^2$  (risultato dalla caratterizzazione delle geodetiche di  $\mathbb{H}^2$  (Teorema 1.3.3)).

**Proposizione 2.3** Le isometrie di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  sono tutte e sole le (anti)-trasformazioni di Möbius della forma

$$\varphi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \quad \text{e} \quad \psi(z) = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\bar{\beta} \bar{z} + \bar{\alpha}}$$

con  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ .

Dim: Usiamo ancora l'isometria  $\Phi$  introdotta nella Proposizione 2.1

Se  $\tilde{\varphi}$  è un'isometria di  $\mathbb{H}^2$ , allora  $\Phi \circ \tilde{\varphi} \circ \Phi^{-1}$  è un'isometria

di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ . Supponiamo che  $\tilde{\varphi}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  con  $ad-bc=1$  e  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Allora

$$\Phi \circ \tilde{\varphi} \circ \Phi^{-1}(z) = \frac{(ai-b+c+id)z + (-ai-b-c+di)}{(-ai+b+c+id)z + (ai+b-c+di)}$$

e la tesi segue ponendo  $\alpha = \frac{1}{2}(a+ib-ci+d)$  e  $\beta = \frac{1}{2}(-a+ib+ci+d)$ . Viceversa, scrivendo  $\alpha+\beta = d+ib$  e  $\alpha-\beta = a-ic$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  ogni mappa della forma  $\frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta}z + \bar{\alpha}}$  con  $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$  si può scrivere come  $\Phi \circ \tilde{\varphi} \circ \Phi^{-1}$  con  $\tilde{\varphi}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  e  $ad-bc=1$ . L'argomento è identico per le isometrie anti-lineari.

Oss Identificando le trasformazioni di Möbius con il gruppo  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ , le isometrie di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$  corrispondono al sottogruppo

$$\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\} \cong \text{SU}(1, 1)$$

dove

$$\text{SU}(1, 1) = \left\{ A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \mid \bar{A}^t \text{diag}(1, -1) A = \text{diag}(1, -1) \right\}$$

### 3. Trigonometria iperbolica

In questa sezione vogliamo derivare le formule che legano la lunghezza dei lati e l'ampiezza degli angoli in un triangolo iperbolico. Per questi conti useremo principalmente il modello del disco.

**Lemma 3.1** Sia  $r \in (0, 1)$ , allora  $d_{\mathbb{B}^2}(0, r) = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$  e di conseguenza  $r = \tanh\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{B}^2}(0, r)\right)$ .

Dim: La geodetica che connette  $0 \in \mathbb{B}^2$  e  $r \in \mathbb{B}^2$  è il segmento euclideo

$\gamma(t) = t$  per  $t \in [0, r]$ . Quindi:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{B}^2}(0, r) &= \ell_{\mathbb{B}^2}(\gamma) = \int_0^r \|\gamma'(t)\|_{\mathbb{B}^2} dt = \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \left[ \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \right]_0^r = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \frac{1+r}{1-r} = e^{d_{\mathbb{B}^2}(0, r)} = e^s \quad \text{e} \quad r = \frac{e^s - 1}{e^s + 1} = \frac{e^{s/2} - e^{-s/2}}{e^{s/2} + e^{-s/2}} = \tanh\left(\frac{s}{2}\right).$$

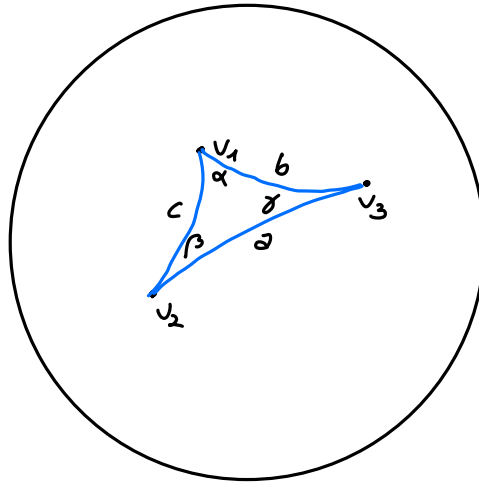
**Lemma 3.2.** Per ogni coppia di punti  $x, y \in \mathbb{B}^2$  vale

$$\frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} = \sinh^2\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{B}^2}(x, y)\right)$$

Dim: Si può verificare con un conto esplicito che l'espressione di sinistra è invariante per isometrie di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ . Siccome lo è evidentemente anche l'espressione di destra, possiamo supporre che  $x=0$  e  $y=r>0$  a meno di applicare un'isometria. Allora per il Lemma 3.1,

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} &= \frac{r^2}{1-r^2} = \frac{\tanh^2(d_{\mathbb{B}^2}(0, r)/2)}{1 - \tanh^2(d_{\mathbb{B}^2}(0, r)/2)} = \sinh^2\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{B}^2}(0, r)\right) \\ &= \sinh^2\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{B}^2}(x, y)\right) \end{aligned}$$

Sia  $T$  un triangolo iperbolico di vertici  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{B}^2$ . Dimostriamo con  $a, b$  e  $c$  la lunghezza iperbolica dei suoi lati e con  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli interni come in figura



**Proposizione 3.3.** [Prima legge dei coseni] Per un triangolo iperbolico come sopra vale

$$\cosh(a) = \cosh(b) \cosh(c) - \sinh(b) \sinh(c) \cos(\alpha)$$

Dim: A meno di isometrie possiamo supporre che  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = r > 0$  e  $v_3 = se^{i\alpha}$  con  $\alpha \in (0, \pi)$ . Per il Lemma 3.1 sappiamo che  $r = \tanh\left(\frac{c}{2}\right)$  e con conti analoghi anche  $s = \tanh\left(\frac{b}{2}\right)$ .

Applichiamo la legge dei coseni euclidea al triangolo di vertici  $v_1, v_2, v_3$ :

$$\begin{aligned} |v_2 - v_3|^2 &= r^2 + s^2 - 2rs \cos(\alpha) \\ &= \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{b}{2}\right) - 2 \tanh\left(\frac{c}{2}\right) \tanh\left(\frac{b}{2}\right) \cos(\alpha) \end{aligned}$$

D'altra parte, per il Lemma 3.2, vale

$$\frac{|v_2 - v_3|^2}{(1 - |v_2|^2)(1 - |v_3|^2)} = \frac{|v_2 - v_3|^2}{(1 - r^2)(1 - s^2)} = \sinh^2\left(\frac{1}{2} d_{\mathbb{B}^2}(v_2, v_3)\right) = \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

e quindi

$$|v_2 - v_3|^2 = (1 - r^2)(1 - s^2) \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{\cosh^2(c/2)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(b/2)} \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right).$$

Uguagliando le due espressioni ottenute e moltiplicando per  $\cosh^2(\frac{c}{2})$  e  $\cosh^2(\frac{b}{2})$  entrambi i membri, abbiamo

$$\begin{aligned}\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) &= \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{c}{2}\right) \\ &\quad - 2 \sinh\left(\frac{c}{2}\right) \sinh\left(\frac{b}{2}\right) \cosh\left(\frac{c}{2}\right) \cosh\left(\frac{b}{2}\right) \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Da qui si conclude usando le relazioni:

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2} \cosh(2x) - \frac{1}{2} \qquad \cosh^2(x) = \frac{1}{2} \cosh(2x) + \frac{1}{2}$$

$$2 \cosh(x) \sinh(x) = \sinh(2x)$$

$$\sinh^2(x) \cosh^2(y) + \sinh^2(y) \cosh^2(x) = \frac{1}{2} (\cosh(2x) \cosh(2y) - 1)$$

**Proposizione 3.4** [Legge dei seni] In un triangolo iperbolico come sopra vale

$$\frac{\sinh(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sinh(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sinh(c)}{\sin(\gamma)}$$

Dim: Poniamo  $A = \cosh(a)$ ,  $B = \cosh(b)$  e  $C = \cosh(c)$ . Per la prima legge dei coseni abbiamo

$$\sin^2(\gamma) = 1 - \cos^2(\gamma) = 1 - \left( \frac{AB - C}{\sinh(a) \sinh(b)} \right)^2$$

da cui

$$\begin{aligned}\sin^2(\gamma) \sinh^2(a) \sinh^2(b) &= \sinh^2(a) \sinh^2(b) - (AB - C)^2 \\ &= (A^2 - 1)(B^2 - 1) - (AB - C)^2 \\ &= 1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC\end{aligned}$$

e quindi  $\frac{\sin^2(\gamma)}{\sinh^2(c)} = \frac{1 - A^2 - B^2 - C^2 + 2ABC}{\sinh^2(a) \sinh^2(b) \sinh^2(c)}$ . Siccome questa espressione è invariante per permutazione degli angoli e dei lati, vale la tesi.

Proposizione 3.5. [Seconda legge dei coseni] In un triangolo iperbolico come

sopra vale

$$\cosh(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cosh(\alpha)\cosh(\beta)}{\sinh(\alpha)\sinh(\beta)}$$

Dim: Poniamo  $A = \cosh(a)$ ,  $B = \cosh(b)$  e  $C = \cosh(c)$ . Dalla prima legge dei coseni abbiamo

$$\cos(\gamma) = \frac{AB - C}{\sinh(a)\sinh(b)} = \frac{AB - C}{\sqrt{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{BC - A}{\sqrt{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}} \quad \text{e} \quad \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}}{\sqrt{(B^2 - 1)(C^2 - 1)}}$$

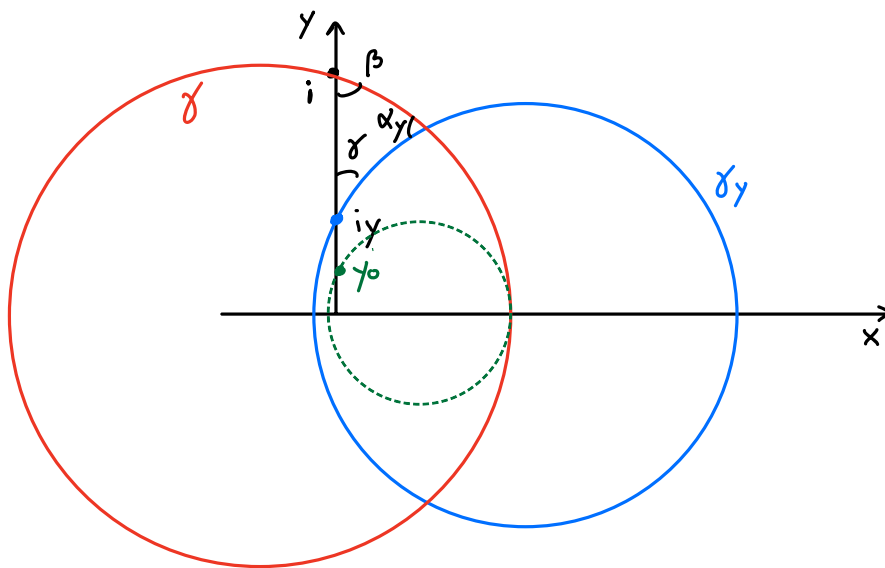
$$\cos(\beta) = \frac{AC - B}{\sqrt{(A^2 - 1)(C^2 - 1)}} \quad \text{e} \quad \sin(\beta) = \frac{\sqrt{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2}}{\sqrt{(A^2 - 1)(C^2 - 1)}}$$

Quindi, sostituendo,

$$\begin{aligned} \frac{\cos(\gamma) + \cosh(\alpha)\cosh(\beta)}{\sinh(\alpha)\sinh(\beta)} &= \frac{(BC - A)(AC - B) + (AB - C)(C^2 - 1)}{1 + 2ABC - A^2 - B^2 - C^2} \\ &= C = \cosh(c). \end{aligned}$$

Proposizione 3.6. Siano  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  tali che  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ . Allora esiste un unico triangolo iperbolico con angoli interni  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  a meno di isometrie.

Dim: Usiamo il modello del semipiano: consideriamo la geodetica data dall'asse  $y$  e la geodetica  $\gamma$  passante per  $i$  che forma un angolo  $\beta$  con l'asse  $y$ . Per ogni  $y < 1$  sia inoltre  $\gamma_y$  la geodetica passante per  $i_y$  che forma un angolo  $\gamma$  con l'asse  $y$  come in figura



Quindi  $\gamma_y$  è la circonferenza di centro  $y \cot(\gamma)$  e raggio  $\frac{y}{\sin(\gamma)}$ .

Osserviamo che  $\gamma_y$  interseca  $\gamma$  per  $y \in (y_0, 1)$ . Sia  $\alpha_y$  l'angolo tra  $\gamma$  e  $\gamma_y$  nel punto di intersezione: si vede che

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \alpha_y = \pi - \beta - \gamma \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \alpha_y = 0$$

Siccome l'angolo  $\alpha_y$  dipende con continuità da  $y$ , esiste un valore  $\bar{y} < 1$  tale che  $\alpha_{\bar{y}} = \alpha$ .

Sia  $T$  un altro triangolo iperbolico di vertici  $A, B$  e  $C$  e angoli interni  $\hat{A} = \alpha$ ,  $\hat{B} = \beta$  e  $\hat{C} = \gamma$ . Possiamo trovare un'isometria di  $\mathbb{H}^2$  tale che  $\varphi(B) = i$  e  $\varphi(C) = iy$  con  $y < 1$ . La seconda legge dei coseni afferma che la lunghezza dei lati è determinata dagli angoli interni, quindi si deve avere  $y = \bar{y}$ . Gli altri lati di  $\varphi(T)$  sono necessariamente anche lungo  $\gamma$  e  $\gamma_y$  dato che la geodetica passante per un punto sull'asse immaginario formando un dato angolo con l'asse  $y$  è unica. Di conseguenza  $\varphi(A) = \gamma \cap \gamma_{\bar{y}}$  e  $\varphi(T)$  coincide con il triangolo costruito prima.



**Proposizione 3.7.** Per ogni  $n \geq 3$  e  $\alpha \in (0, \frac{n-2}{n}\pi)$  esiste un poligono regolare iperbolico con  $n$  lati e angoli pari ad  $\alpha$ .

Dim: Consideriamo il poligono iperbolico con vertici nei punti  $v_k(r) = re^{\frac{2\pi i k}{n}}$  con  $r \in (0, 1)$ . Siccome la rotazione euclidea centrata in  $O$  e angolo  $\frac{2\pi k}{n}$  è un'isometria di  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$ , questi poligoni sono regolari per ogni  $r \in (0, 1)$ . Consideriamo il triangolo iperbolico  $T(r)$  di vertici  $O, re^{\frac{2\pi i k}{n}}$  e  $re^{\frac{2\pi i (k+1)}{n}}$ . Gli angoli interni nei vertici  $re^{\frac{2\pi i k}{n}}$  e  $re^{\frac{2\pi i (k+1)}{n}}$  sono congruenti e, detta  $\beta(r)$  l'ampiezza, per la legge dei seni abbiamo

$$\sin(\beta(r)) = \frac{\sinh(b(r)) \sin(2\pi/n)}{\sinh(a(r))}$$

dove  $b(r) = d_{\mathbb{B}^2}(O, re^{\frac{2\pi i k}{n}}) = \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$  e  $a(r)$  è la lunghezza del lato opposto a  $O$ . Per la prima legge dei coseni,

$$\cosh(a(r)) = \cosh^2(b(r)) - \sinh^2(b(r)) \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{(1+r^2)^2 - 4r^2 \cos(2\pi/n)}{(1-r^2)^2}$$

Quindi l'angolo del poligono è ampio  $2\beta(r)$  e varia con continuità in  $r \in (0, 1)$ . Ora,

- se  $r \rightarrow 1^-$ ,  $2\beta(r) \rightarrow 0$  in quanto i vertici tendono a  $\partial\mathbb{B}^2 = S^1$  e le geodetiche che formano i lati sono tangenti tra loro in tali punti

- se  $r \rightarrow 0^+$ , allora  $\text{Area}(T(r)) \rightarrow 0$  ma, d'altra parte, per uno degli esenzizi,  $\text{Area}(T(r)) = \pi - \frac{2\pi}{n} - 2\beta(r)$ , per cui  $2\beta(r) \rightarrow \frac{(n-2)\pi}{n}$ .

Per continuità esiste  $r \in (0, 1)$  tale che  $\beta(r) = \alpha$  come voluto.

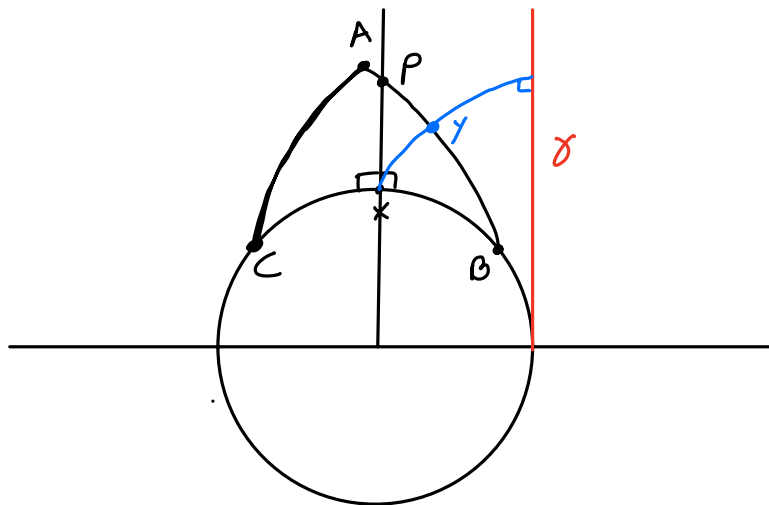
Più in generale vale il seguente risultato che non dimostreremo

**Proposizione 3.8.** Siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in (0, \pi)$  tali che  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n < (n-2)\pi$ . Allora esiste un  $n$ -gono iperbolico con angoli interni  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

**Def** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico geodetico (la distanza tra due punti è realizzata dalla lunghezza di un'unica curva che connette i due punti). Sia  $\delta > 0$ . Un triangolo geodetico  $T$  si dice  $\delta$ -fine se ogni lato di  $T$  è contenuto nell'unione dei  $\delta$ -intorni degli altri due.

**Teorema 3.9** Ogni triangolo geodetico  $T$  nel piano iperbolico è  $\log(1+\sqrt{2})$ -fine.

Dim: È sufficiente mostrare che per ogni  $x$  appartenente a uno dei lati esiste  $y$  in uno degli altri due lati tale che  $d_{\mathbb{H}^2}(x, y) \leq \log(1+\sqrt{2})$ . Usiamo il modello del semipiano e, detti  $A, B, C$  i vertici di  $T$  supponiamo che  $x \in \overline{BC}$ . Consideriamo la geodetica passante per  $x$  e ortogonale a  $\overline{BC}$ . Essa intersecherà uno degli altri due lati in un punto  $P$ . Supponiamo che  $P \in \overline{AB}$ . Basta mostrare che esiste  $y \in \overline{PB}$  tale che  $d_{\mathbb{H}^2}(x, y) \leq \log(1+\sqrt{2})$ :



Consideriamo la geodetica completa  $\gamma$  che ha come punti all'infinito quello del raggio  $\overrightarrow{xP}$  e del raggio  $\overrightarrow{xB}$ . La distanza tra  $x$  e  $\gamma$  è realizzata dal segmento geodetico passante per  $x$  e ortogonale a  $\gamma$ . Sia  $y$  il punto di intersezione tra tale segmento e  $\overline{PB}$ . Allora  $d_{\mathbb{H}^2}(x, y) \leq d_{\mathbb{H}^2}(x, \gamma)$ . Basta dimostrare quindi che in un triangolo rettangolo con due vertici all'infinito l'altezza dal terzo vertice è lunga al più  $\log(1 + \sqrt{2})$ . A meno di isometrie possiamo supporre che  $x=i$  sia il vertice interno e i vertici all'infinito siano  $\infty$  e  $1$ . Rimane da calcolare la distanza tra  $i$  e la retta verticale  $x=1$ .

Sia  $\varphi$  la riflessione rispetto a tale retta, allora

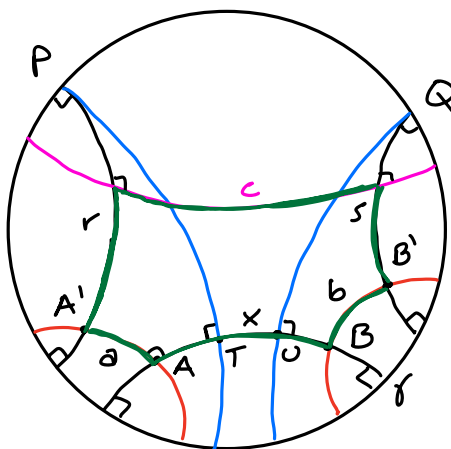
$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^2}(i, \{x=1\}) &= \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^2}(i, \varphi(i)) = \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^2}(i, i+2) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{|i - \overline{(i+2)}| + |i - (i+2)|}{|i - \overline{(i+2)}| - |i - (i+2)|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{\sqrt{8} + 2}{\sqrt{8} - 2} \right) = \log(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

**Lemma 3.10** Siano  $a, b, c \geq 0$ . Esiste un unico, a meno di isometrie, esagono iperbolico retto con lati alterni di lunghezza  $a, b$  e  $c$ .

Dim: Usiamo il modello del disco. Consideriamo una geodetica  $\gamma$  e due punti arbitrari  $A$  e  $B$  su di essa. Consideriamo le geodetiche perpendicolari a  $\gamma$  passanti per  $A$  e  $B$ . Su di esse fissiamo i punti  $A'$  a distanza  $a$  da  $A$  e  $B'$  a distanza  $b$  da  $B$ .

Siano  $r$  e  $s$  le perpendicolari uscenti da  $A'$  e  $B'$ .

Denotiamo con  $P$  e  $Q$  due punti all'infinito di  $r$  e  $s$  come in figura. Tracciamo poi le perpendicolari a  $\gamma$  passanti per  $P$  e  $Q$ . Siano  $T$  ed  $U$  i punti di intersezione e sia  $x$  la distanza tra essi.



$$a, b > 0$$

Se  $x > 0$ , allora  $r$  ed  $s$  sono ultraparallele ed esiste un'unica geodetica ortogonale a entrambe che realizza la loro distanza  $f(x)$ . Se  $x = 0$ ,  $P$  e  $Q$  coincidono per unicit  della geodetica perpendicolare a  $\gamma$  per un dato punto. Quindi la funzione  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$    monotona crescente e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ . Per continuit  esiste un unico  $x \in [0, +\infty)$  tale che  $f(x) = c$  ottenendo dunque l'esagono netto cercato.

Questa costruzione funziona fin tanto che almeno due tra  $a, b$  e  $c$  sono positivi. Se esattamente due sono zero, ad esempio  $a$  e  $b$ , basta prendere un qualsiasi segmento geodetico di lunghezza  $c$ , due raggi geodetici ortogonali partenti dai suoi estremi e la geodetica completa con gli stessi estremi dei due raggi.

Se  $a = b = c = 0$  allora l'esagono netto degenera a un triangolo ideale, ovvero un triangolo con tutti i vertici sul bordo all'infinito. 30

## 4. Il modello dell'iperboloide

### 4.1. In dimensione 2

Consideriamo  $\mathbb{R}^{2,1}$ , ovvero uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 munito di una forma bilineare simmetrica di segnatura  $(2,1)$ :

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$$

Sia  $\mathcal{H}^2 = \{x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_3 > 0\}$ . Osserviamo che lo spazio tangente a  $\mathcal{H}^2$  in un punto  $x \in \mathcal{H}^2$  si identifica con lo spazio vettoriale

$$T_x \mathcal{H}^2 = \{y \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, y \rangle = 0\}$$

Per invarianza della segnatura, la restrizione della forma quadratica a  $T_x \mathcal{H}^2$  è definita positiva  $\forall x \in \mathcal{H}^2$ , per cui possiamo definire una norma ponendo

$$\|v\|_{\mathcal{H}^2} := \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad \forall v \in T_x \mathcal{H}^2$$

Questo permette di definire una nozione di lunghezza di curve in  $\mathcal{H}^2$  e di distanza  $d_{\mathcal{H}^2}$  tra punti di  $\mathcal{H}^2$ , esattamente come negli altri modelli.

**Teorema 4.1.1**  $(\mathcal{H}^2, d_{\mathcal{H}^2})$  è isometrico a  $(\mathbb{B}^2, d_{\mathbb{B}^2})$

Dim: Definiamo la mappa  $\Phi: \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$  ottenuta in questo modo: per ogni  $x \in \mathcal{H}^2$ ,  $\Phi(x)$  è l'intersezione tra la retta passante per  $x$  e  $(0, 0, -1)$  e  $\mathbb{B}^2$  visto come la palla unitaria nel piano  $x_3 = 0$ . In forma esplicita  $\Phi(x) = \frac{1}{x_3 + 1} (x_1, x_2)$ . È facile vedere che  $\Phi$  è invertibile con inversa  $\Phi^{-1}(x, y) = \left( \frac{2x}{1-x^2-y^2}, \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \frac{1+x^2+y^2}{1-x^2-y^2} \right)$ . Verifichiamo ora che  $\Phi$  preserva le norme:

$$\begin{aligned}
d\Phi_x(v) &= \frac{d}{dt} \Phi(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \quad \text{con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma'(0) = v \\
&= \frac{d}{dt} \Phi(\cosh(t)x + \sinh(t)v) \Big|_{t=0} \\
&= \left( \frac{v_1(1+x_3) - x_1v_3}{(1+x_3)^2}, \frac{v_2(1+x_3) - x_2v_3}{(1+x_3)^2} \right)
\end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned}
\|d\Phi_x(v)\|_{\mathbb{B}^2} &= \frac{2}{1-|\Phi(x)|^2} \sqrt{\left( \frac{v_1(1+x_3) - x_1v_3}{(1+x_3)^2} \right)^2 + \left( \frac{v_2(1+x_3) - x_2v_3}{(1+x_3)^2} \right)^2} \\
&= \frac{(1+x_3)}{(1+x_3)^2} \cdot \|v\|_{\mathbb{J}^2} (1+x_3) = \|v\|_{\mathbb{J}^2}
\end{aligned}$$

e possiamo concludere che  $\Phi$  è un'isometria

**Proposizione 4.1.2.** Il gruppo di isometrie di  $(\mathbb{J}^2, d_{\mathbb{J}^2})$  è

$$O^+(2,1) = \{ A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{2,1}, \quad A\mathbb{J}^2 = \mathbb{J}^2 \}$$

Dim: È chiaro che  $O^+(2,1) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{J}^2, d_{\mathbb{J}^2})$ .

Per l'altra inclusione, sia  $p = (0,0,1) \in \mathbb{J}^2$  e sia  $\varphi$  un'isometria di  $\mathbb{J}^2$  arbitraria. Poniamo  $x = \varphi(p)$ ,  $y = d\varphi_p(1,0,0)$  e  $z = d\varphi_p(0,1,0)$ .

Osserviamo che la matrice  $A = (y|z|x)$  che ha per colonne  $x, y$  e  $z$  appartiene a  $O^+(2,1)$ . Vogliamo concludere che  $\varphi = A$ .

Sia  $q \in \mathbb{J}^2$  arbitrario e sia  $\gamma$  la geodetica che connette  $p$  a  $q$ .

Sia  $v$  il vettore tangente a  $\gamma$  in  $q$  e  $d = d_{\mathbb{J}^2}(p, q)$ . Siccome

$A$  e  $\varphi$  sono isometrie,  $A(\gamma)$  e  $\varphi(\gamma)$  sono geodetiche che connettono  $x$  a  $A(q)$  e  $x$  a  $\varphi(q)$ . Inoltre,  $d_{\mathbb{J}^2}(x, A(q)) = d_{\mathbb{J}^2}(x, \varphi(q)) = d$ .

Tuttavia, i vettori tangenti di  $A(\gamma)$  e  $\varphi(\gamma)$  in  $x$  coincidono per

definizione di  $A$ . Quindi  $A(\gamma) = \varphi(\gamma)$  per unicità delle geodetiche passanti per un dato punto con dato vettore tangente e di conseguenza  $A(q) = \varphi(q)$ . Essendo  $q$  arbitrario,  $A = \varphi$ .

Oss L'ultimo argomento di questa dimostrazione implica un fatto molto importante e valido in generale nell'ambito di varietà Riemanniane: un'isometria è determinata dal suo comportamento al primo ordine.

Proposizione 4.1.3 Le geodetiche complete di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  sono le intersezioni di  $\mathbb{H}^2$  con piani di  $\mathbb{R}^{2,1}$  passanti per l'origine.

Dim: Siccome le isometrie di  $(\mathbb{H}^2, d_{\mathbb{H}^2})$  sono mappe lineari e agiscono transitivamente nel piano iperbolico, è sufficiente dimostrare l'enunciato per le geodetiche passanti per  $(0,0,1)$ . Ora, usando l'isometria del teorema 4.1.1,  $\Phi(0,0,1) = 0 \in \mathbb{B}^2$  e basta mostrare che se  $\gamma \subset \mathbb{B}^2$  è un segmento euclideo passante per  $0 \in \mathbb{B}^2$ , allora  $\Phi^{-1}(\gamma)$  è l'intersezione tra  $\mathbb{H}^2$  e un piano per l'origine. Inoltre, siccome le rotazioni centrate in  $0 \in \mathbb{B}^2$  sono isometrie, possiamo supporre che  $\gamma$  sia il segmento orizzontale con  $y=0$ . Calcoliamo:

$$\gamma = \{y=0\} \cap \mathbb{B}^2$$

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\gamma) &= \left\{ \left( \frac{2x}{1-x^2}, 0, \frac{1+x^2}{1-x^2} \right) \mid x \in (-1,1) \right\} \\ &= \{x_2=0\} \cap \mathbb{H}^2\end{aligned}$$

e otteniamo il risultato voluto.

## 4.2 Lo spazio iperbolico n-dimensionale

Il modello dell'iperboloide è particolarmente utile in dimensione alta dato che sia le isometrie che le geodetiche si descrivono facilmente tramite l'algebra lineare.

**Def** Il modello dell'iperboloide dello spazio iperbolico n-dimensionale è lo spazio metrico

$$\mathcal{H}^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0 \},$$

dove  $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$ , munito della distanza indotta dalla norma su  $T_x \mathcal{H}^n$  data dalla restrizione di  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su  $T_x \mathcal{H}^n$ .

La stessa dimostrazione della Proposizione 4.1.2 mostra che il gruppo di isometrie di  $(\mathcal{H}^n, d_{\mathcal{H}^n})$  è

$$O^+(n, 1) = \{ A \in GL(n+1, \mathbb{R}) \mid \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^{n,1}, A\mathcal{H}^n = \mathcal{H}^n \}$$

**Def** Diciamo che  $S \subset \mathcal{H}^n$  è un K-sottospazio totalmente geodetico se  $S \neq \emptyset$  ed è l'intersezione di  $\mathcal{H}^n$  con un sottospazio vettoriale di dimensione  $K+1$  in  $\mathbb{R}^{n,1}$ .

**Oss** Un K-sottospazio totalmente geodetico con la restrizione della distanza ambiente è isometrico a  $(\mathcal{H}^K, d_{\mathcal{H}^K})$ . Questo si vede facilmente prendendo sottospazi coordinati e usando la transitività dell'azione di  $O^+(n, 1)$  sui sottospazi vettoriali  $(K+1)$ -dimensionali di  $\mathbb{R}^{n,1}$ .

Adattando la dimostrazione del caso euclideo si può dimostrare: [34]



Teorema 4.2.1  $O^+(n, 1)$  è generato da riflessioni lungo iperpiani.

Geodetiche di  $(\mathcal{H}^n, d_{\mathcal{H}^n})$  sono dunque l'intersezione di piani per l'origine in  $\mathbb{R}^{n,1}$  con  $\mathcal{H}^n$ . In particolare, possiamo parametrizzare facilmente la geodetica completa passante per  $p \in \mathcal{H}^n$  e con vettore tangente  $v \in T_p \mathcal{H}^n$ :

$$\gamma(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v$$

Infatti,  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$  e  $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -1$  per cui  $\gamma(t) \in \mathcal{H}^n$  e la sua immagine è l'intersezione tra  $\mathcal{H}^n$  e il piano  $\text{Span}(p, v)$ . Inoltre,

$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 1$  per cui se  $d = d_{\mathcal{H}^n}(p, q)$  allora  $q = \gamma(d)$  e

$$-\langle p, q \rangle = -\langle p, \gamma(d) \rangle = -\langle p, \cosh(d)p + \sinh(d)v \rangle = \cosh(d).$$

Abbiamo quindi un modo semplice per calcolare la distanza tra due punti:

$$\cosh(d_{\mathcal{H}^n}(p, q)) = -\langle p, q \rangle.$$

Possiamo definire anche in dimensione arbitraria la mappa  $\Phi: \mathcal{H}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  che associa ad un punto  $x \in \mathcal{H}^n$  l'intersezione tra la retta passante per  $x$  e  $(0, 0, \dots, -1)$  con la palla unitaria nell'iperpiano  $x_{n+1} = 0$ . La mappa  $\Phi$  definisce un'isometria tra  $(\mathcal{H}^n, d_{\mathcal{H}^n})$  e  $(\mathbb{B}^n, d_{\mathbb{B}^n})$ , dove la distanza in  $\mathbb{B}^n$  è indotta dalla norma  $\frac{2}{1-|x|^2} |v|$  per  $x \in \mathbb{B}^n$  e  $v \in T_x \mathbb{B}^n$ . Il conto è analogo al caso bidimensionale.

Geodetiche di  $(\mathbb{B}^n, d_{\mathbb{B}^n})$  sono circonferenze ortogonali alla sfera unitaria e segmenti euclidei passanti per l'origine.

Si può anche definire un modello del semispazio  $n$ -dimensionale consideran-

do  $\mathbb{H}^n = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n > 0\}$  munito della distanza indotta dalla norma  $\frac{1}{y_n} |v|$  per  $v \in T_y \mathbb{H}^n$ .

**Def** L'inversione rispetto alla sfera di raggio  $R$  e centro  $x_0$  è la mappa  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $\varphi(x) = x_0 + R^2 \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^2}$ .

**Proposizione 4.2.2** L'inversione rispetto alla sfera di raggio  $\sqrt{2}$  centrata in  $e_n = (0, \dots, 1)$  seguita dalla riflessione rispetto all'iperpiano  $x_n = 0$  fornisce un'isometria tra  $(\mathbb{B}^n, d_{\mathbb{B}^n})$  e  $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$

**Dim:** In coordinate la mappa dell' enunciato è

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{2}{1 + |x|^2 - 2x_n} (x_1, \dots, x_{n-1}, 1 - x_n) - (0, \dots, 1)$$

Vediamo che se  $|x| = 1$  allora l'ultima coordinata di  $\Phi(x)$  è

$$\Phi(x)_n = \frac{2}{2 - 2x_n} (1 - x_n) - 1 = 0 \text{ se } x \neq e_n \text{ e } \Phi(e_n) = \infty.$$

Siccome  $\Phi(0) = (0, \dots, 1) \in \mathbb{H}^n$  e  $\Phi$  è un' involuzione continua, abbiamo che  $\Phi(\mathbb{B}^n) = \mathbb{H}^n$ .

Resta solo da verificare che  $\|d\Phi_x(v)\|_{\mathbb{H}^n} = \|v\|_{\mathbb{B}^n}$ :

$$(d\Phi)_x(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(x + tv) = \frac{2}{(1 + |x|^2 - 2x_n)} \left[ (v_1, \dots, v_{n-1}, -v_n) - \frac{2\langle v, x - e_n \rangle}{(1 + |x|^2 - 2x_n)} (x_1, \dots, 1 - x_n) \right]$$

$$\text{e } \|d\Phi_x(v)\|_{\mathbb{H}^n} = \frac{1 + |x|^2 - 2x_n}{1 - |x|^2} \cdot \frac{2}{(1 + |x|^2 - 2x_n)} |v| = \frac{2}{1 - |x|^2} |v|.$$

**Oss** D' ora in avanti useremo  $\mathbb{H}^n$  per denotare un qualsiasi modello dello spazio iperbolico  $n$ -dimensionale.

## 5. Compattificazione e isometrie dello spazio iperbolico

### 5.1 Compattificazione

Siccome  $\mathbb{H}^n$  è omeomorfo a una palla aperta, è naturale aggiungere una sfera all'infinito in modo da ottenere uno spazio compatto  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$ . Nel modello del disco, questo vuol dire aggiungere a  $\mathbb{B}^n$  la sfera unitaria. C'è però un modo più intrinseco di definire i punti all'infinito e compattificare  $\mathbb{H}^n$ .

**Def** Sia  $\gamma: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$  un raggio geodetico parametrizzato per lunghezza d'arco. Definiamo il bordo all'infinito  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$  di  $\mathbb{H}^n$  come l'insieme delle classi di equivalenza di raggi geodetici rispetto alla relazione

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \text{se e solo se} \quad \sup_{t \in [0, +\infty)} \{d_{\mathbb{H}^n}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\} < +\infty$$

**Proposizione 5.1.1.** Nel modello del disco,  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$  si identifica con la sfera unitaria.

**Dim:** Ogni raggio geodetico in  $\mathbb{B}^n$  ha un punto estremo sulla sfera unitaria.

Dobbiamo mostrare che due raggi geodetici  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno lo stesso punto estremo se e solo se sono nella stessa classe di equivalenza.

Facciamo questo conto nel modello del semispazio. Supponiamo che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  abbiano lo stesso punto all'infinito. A meno di isometrie possiamo supporre che tale punto sia  $\infty$  e i due raggi geodetici siano

$$\gamma_1(t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n e^t) \quad \gamma_2(t) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n e^t) \quad y_n > x_n$$

Entrambi i raggi sono equivalenti a

$$\gamma_3(t) = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x_n e^+)$$

dato che

- $d_{\mathbb{H}^n}(\gamma_2(t), \gamma_3(t)) = \log\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$  usando la formula della distanza vista per il semipiano, dato che  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  sono contenuti in un sottospazio totalmente geodetico isometrico ad  $\mathbb{H}^2$ .

- $d_{\mathbb{H}^n}(\gamma_1(t), \gamma_3(t)) \leq \ell_{\mathbb{H}^n}(\gamma_t)$  dove  $\gamma_t$  è il segmento orizzontale

$$\gamma_t(s) = (sx_1 + (1-s)y_1, \dots, sx_{n-1} + (1-s)y_{n-1}, x_n e^+)$$

$$\text{e } \ell_{\mathbb{H}^n}(\gamma_t) = \frac{\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2}}{x_n e^+} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Viceversa, supponiamo che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  abbiano punti estremi distinti.

A meno di isometrie possiamo supporre che un punto sia  $\infty$  e l'altro

sia sull'iperpiano  $x_n = 0$ . Allora per ogni  $M > 0$  esiste  $t_0 > 0$

ta $\grave{c}$ e che  $\gamma_1(t) \in \{x_n > M\}$  e  $\gamma_2(t) \in \{x_n < \frac{1}{M}\}$   $\forall t \geq t_0$ .

Quindi  $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \geq \log(M^2)$  e per l'arbitrarietà di  $M$ , i raggi

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non sono equivalenti.

Anche la topologia su  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial_\infty \mathbb{H}^n$  può essere definita in modo intrinseco.

co. Per ogni  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$  definiamo un sistema fondamentale di intorni di  $p$

come segue. Sia  $\gamma$  un raggio geodetico tale che  $[\gamma] = p$  e sia  $V$  un

intorno di  $\gamma'(0) \in T_{\gamma(0)} \mathbb{H}^n$ . Per ogni  $r > 0$  poniamo

$$U(\gamma, V, r) = \{ \alpha(t) \mid \alpha(0) = \gamma(0), \alpha'(0) \in V, t > r \} \cup$$

$$\{ [\alpha] \mid \alpha(0) = \gamma(0), \alpha'(0) \in V \}$$

il sistema fondamentale di intorni si ottiene facendo variare  $V, r$  e 38

$\gamma$  nella classe di  $p$ . La topologia così definita rende  $\overline{H}^n$  omeomorfo al disco unitario, come si può verificare facilmente usando il modello del disco.

## 5.2. Classificazione delle isometrie

**Lemma 5.2.1** Sia  $\varphi \neq \text{id}$  un'isometria di  $H^n$ . Allora vale esattamente una delle seguenti:

- i)  $\varphi$  ha almen un punto fisso in  $H^n$
- ii)  $\varphi$  non ha punti fissi in  $H^n$  e ha esattamente un punto fisso in  $\partial_\infty H^n$
- iii)  $\varphi$  non ha punti fissi in  $H^n$  e ha esattamente due punti fissi in  $\partial_\infty H^n$ .

Dim: Siccome un'isometria manda raggi geodetici in raggi geodetici, ogni isometria  $\varphi$  si estende a  $\bar{\varphi}: \overline{H}^n \rightarrow \overline{H}^n$  e tale estensione è continua. Per il teorema del punto fisso di Brouwer,  $\bar{\varphi}$  ha almeno un punto fisso in  $\overline{H}^n$ . Basta mostrare che se  $\bar{\varphi}$  ha tre punti fissi  $P, Q, R$  in  $\partial_\infty H^n$  allora  $\varphi$  ha un punto fisso in  $H^n$ . Sia  $r$  la geodetica completa con estremi  $P$  e  $Q$  e sia  $s$  la geodetica ortogonale a  $r$  con punto estremo  $R$ . L'isometria  $\varphi$  lascia  $r$  invariante e di conseguenza anche  $s$  per unicità. Quindi  $\varphi$  fissa il punto  $r \cap s$ .

**Def** Sia  $\varphi \neq \text{id}$  un'isometria di  $H^n$ . Con riferimento al Lemma 5.2.1, diciamo che  $\varphi$  è ellittica se del tipo i), parabolica se del tipo ii) e iperbolica oloxodromica se del tipo iii).

Un' isometria Coxodromica  $\varphi$  fissa due punti  $p, q \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$  e quindi preserva la geodetica con tali punti estremi. Tale geodetica è detta asse dell' isometria Coxodromica, la quale agisce per traslazione sul suo asse, nel senso che  $d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x)) = d_{\mathbb{H}^n}(y, \varphi(y))$  per ogni  $x, y$  appartenenti all' asse.

**Def** Sia  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$ . Un' orosfera centrata in  $p$  è una sottovarietà connessa ortogonale a tutte le geodetiche uscenti da  $p$ .

**Oss** Nel modello del semispazio, le orosfere centrate in  $\infty$  sono iperpiani orizzontali. Le orosfere centrate negli altri punti sono sfere tangenti all' iperpiano all' infinito  $x_n = 0$ . Osservando gli iperpiani orizzontali si vede facilmente che la distanza indotta sulle orosfere è un multiplo della distanza Euclidea. Le isometrie paraboliche preservano le orosfere.

**Def** Sia  $\varphi \neq \text{id}$  un' isometria di  $\mathbb{H}^n$ . La lunghezza di traslazione di  $\varphi$  è

$$d(\varphi) = \inf_{x \in \mathbb{H}^n} d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x))$$

Diciamo che  $x_0 \in \mathbb{H}^n$  realizza la lunghezza di traslazione se  $d(\varphi) = d_{\mathbb{H}^n}(x_0, \varphi(x_0))$

**Proposizione 5.2.2** Sia  $\varphi \neq \text{id}$  un' isometria di  $\mathbb{H}^n$ .

- i) se  $\varphi$  è ellittica, allora  $d(\varphi) = 0$  e la lunghezza di traslazione è realizzata da un punto fisso di  $\varphi$ .
- ii) se  $\varphi$  è parabolica allora  $d(\varphi) = 0$  ma la lunghezza di traslazione non è realizzata
- iii) se  $\varphi$  è Coxodromica allora  $d(\varphi) > 0$  e la lunghezza di traslazione 40

è realizzata da un qualsiasi punto sul suo asse.

Dim: i) è ovvia

ii) possiamo supporre che nel modello del semipiano il punto fisso di  $\varphi$  sia  $\infty$ . Allora  $\varphi$  manda rette verticali in rette verticali e il conto della Proposizione 5.1.1 mostra che  $d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x)) \rightarrow 0$  se  $x \rightarrow \infty$ . Quindi  $d(\varphi) = 0$  ma chiaramente non può essere realizzato da  $x_0 \in \mathbb{H}^n$  perché sarebbe un punto fisso.

iii) sia  $\gamma$  l'asse di  $\varphi$  e  $x \in \gamma$ . L'iperpiano totalmente geodetico ortogonale a  $\gamma$  passante per  $x$  è mandato da  $\varphi$  nell'iperpiano totalmente geodetico ortogonale a  $\gamma$  passante per  $\varphi(x)$ . La distanza tra questi due iperpiani è esattamente  $d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x))$ , quindi la lunghezza di traslazione è realizzata da punti sull'asse ed è strettamente positiva.

### 5.3. Convessità della funzione distanza

Ricordiamo che una funzione  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente convessa se

$$f(tv + (1-t)w) < tf(v) + (1-t)f(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in (0, 1)$$

Identifichiamo una geodetica completa di  $\mathbb{H}^n$  con  $\mathbb{R}$  fissandone una parametrizzazione per lunghezza d'arco.

Proposizione 5.3.1 Siano  $\gamma, \gamma' \subset \mathbb{H}^n$  geodetiche disgiunte. La funzione

$$\begin{aligned} d: \gamma \times \gamma' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto d_{\mathbb{H}^n}(x, y) \end{aligned}$$

$\gamma \cap \gamma' = \emptyset$  in  $\mathbb{H}^n$   
 è strettamente convessa. Inoltre  $d$  è propria se  $\gamma$  e  $\gamma'$  sono ultraparallele.

Dim: Per risultati generali sulle funzioni continue e convesse, basta dimostrare

che  $d\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2))$  per ogni coppia di punti  $(x_i, y_i) \in \gamma \times \gamma'$  distinti. Supponiamo che  $x_1 \neq x_2$  e denotiamo  $m = \frac{x_1+x_2}{2}$  e  $n = \frac{y_1+y_2}{2}$ . Sia  $\sigma_p$  l'isometria di  $\mathbb{H}^n$  tale che  $\sigma_p(p) = p$  e  $d\sigma_p(v) = -v \quad \forall v \in T_p \mathbb{H}^n$ . L'isometria  $\tau = \sigma_n \circ \sigma_m$  preserva la geodetica passante per  $m$  ed  $n$ , quindi è un'isometria Coxeteriana e la sua lunghezza di traslazione è  $2d_{\mathbb{H}^n}(m, n)$ . Siano  $z_i = \tau(x_i)$ .

Osserviamo che

$$2d_{\mathbb{H}^n}(m, n) = d_{\mathbb{H}^n}(m, \tau(m)) < d_{\mathbb{H}^n}(x_1, \tau(x_1)) = d_{\mathbb{H}^n}(x_1, z_1)$$

perché  $x_1$  non appartiene all'asse di  $\tau$  su cui è realizzata la lunghezza di traslazione. Ora, per la disuguaglianza triangolare,

$$d_{\mathbb{H}^n}(x_1, z_1) \leq d_{\mathbb{H}^n}(x_1, y_1) + d_{\mathbb{H}^n}(y_1, z_1)$$

e

$$d_{\mathbb{H}^n}(z_1, y_1) = d_{\mathbb{H}^n}(\sigma_n(x_2), \sigma_n(y_2)) = d_{\mathbb{H}^n}(x_2, y_2)$$

perché  $\sigma_n(y_2) = y_1$  e  $\sigma_m(x_2) = x_1$ . (per cui  $z_1 = \tau(x_1) = \sigma_n(\sigma_m(x_1)) = \sigma_n(x_2)$ )

Ma allora,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^n}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) &= d_{\mathbb{H}^n}(m, n) < \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(x_1, z_1) \leq \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(x_1, y_1) + \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(y_1, z_1) \\ &\leq \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(x_1, y_1) + \frac{1}{2} d_{\mathbb{H}^n}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

come volevamo. Se  $\gamma$  e  $\gamma'$  sono ultraparallele allora  $d$  ammette minimo per cui è propria.



## 6. Varietà iperboliche

### 6.1. Definizioni

**Def** Una varietà iperbolica è uno spazio topologico  $M$  munito di una distanza  $d_M$  tale che  $(M, d_M)$  è localmente isometrico a  $(\mathbb{H}^n, d_{\mathbb{H}^n})$ , ovvero esiste una collezione di aperti  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , dette carte locali, ed isometrie  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{H}^n$ .

**Def** Una varietà iperbolica  $M$  è completa se lo spazio metrico  $(M, d_M)$  è geodetico (la distanza è realizzata da una curva) e completo.

**Teorema 6.1.1.** Ogni varietà iperbolica  $M$  semplicemente connessa e completa è isometrica ad  $\mathbb{H}^n$ .

**Dim:** Sia  $x \in M$  e sia  $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{H}^n$  un'isometria locale con  $x \in U$  come nella definizione di varietà. Mostriamo che  $\varphi$  si estende in modo unico ad un'isometria locale  $\text{dev}: M \rightarrow \mathbb{H}^n$ .

Sia  $y \in M$  e sia  $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$  un arco che connette  $x$  e  $y$ .

Per compattezza di  $[0, 1]$ , esiste una partizione  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_K = 1$

talché  $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$  e  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{H}^n$ , carte locali dell'

la definizione, per ogni  $i = 0, \dots, K-1$ . Possiamo supporre che  $U_0 \subset U$ ,

$V_0 \subset V$  e  $\varphi_0 = \varphi$ . Induttivamente su  $i$ , modifichiamo  $\varphi_i$  cosicché

$\varphi_i$  coincide con  $\varphi_{i-1}$  sulla componente connessa  $C_i \subset U_{i-1} \cap U_i$  che

contiene  $\alpha(t_i)$ . Per fare ciò, notiamo che  $\varphi_{i-1} \circ \varphi_i^{-1}$  è un'isometria

tra aperti di  $\mathbb{H}^n$  e quindi si estende a un'isometria  $A_i$  di  $\mathbb{H}^n$ , [43]

per cui  $A_i \circ \varphi_i$  coincide con  $\varphi_{i-1}$  su  $C_i$ . Definiamo allora  $\text{dev}(y) = \varphi_i(y)$ . Osserviamo che la definizione di  $\text{dev}(y)$  non dipende da nessuna delle scelte fatte:

- se cambiamo la partizione di  $[0,1]$ , basta passare ad un raffinamento comune per vedere che  $\text{dev}(y)$  non cambia
- se prendiamo un altro cammino  $\beta$  che connette  $x$  e  $y$ , siccome  $M$  è semplicemente connessa,  $\alpha$  è omotopo a  $\beta$ . L'immagine dell'omotopia è compatta in  $M$  per cui può essere ricoperta da un numero finito di carte locali  $(U_i, \varphi_i)$ . Esiste inoltre  $N > 0$  tale che ogni quadrato nella griglia  $\frac{1}{N} \times \frac{1}{N}$  in  $[0,1] \times [0,1]$  ha immagine tramite  $\alpha$  contenuta in uno degli  $U_i$ . Modifichiamo allora le isometrie  $\varphi_i$  induttivamente in modo che coincidano sulle intersezioni dei loro domini mostrando dunque che  $\text{dev}(y)$  non dipende da  $\alpha$  e  $\beta$ .

Per costruzione  $\text{dev}: M \rightarrow \mathbb{H}^n$  è un'isometria locale. Siccome  $M$  è completa,  $\text{dev}$  è un rivestimento (soddisfa la proprietà di sollevamento dei cammini). Poiché  $M$  è semplicemente connessa,  $\text{dev}$  è iniettiva e, dunque, è un'isometria.

La mappa costruita nella dimostrazione del Teorema 6.1.1 è detta mappa sviluppante (developing map).

Corollario 6.1.2. Ogni  $n$ -varietà iperbolica completa  $M$  è isometrica a  $\mathbb{H}^n/\Gamma$

dove  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  che agisce in modo libero e propriamente discontinuo.

Dim: Sollevando la distanza su  $M$  al suo rivestimento universale e applicando il Teorema 6.1.1 possiamo identificare isometricamente  $\mathbb{H}^n$  con  $\tilde{M}$ .  
Siccome la distanza su  $\tilde{M}$  è il sollevamento della distanza su  $M$ , gli automorfismi del rivestimento universale sono isometrie di  $\mathbb{H}^n$ .  
C'è dunque un omomorfismo di gruppi (detto rappresentazione di deck)  $\text{hol}: \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Per costruzione  $M = \tilde{M}/\pi_1(M)$  è isometrico a  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  dove  $\Gamma = \text{hol}(\pi_1(M))$ . L'azione di  $\Gamma$  è necessariamente libera e propriamente discontinua perché il quoziente  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  è di Hausdorff e  $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$  è un rivestimento.

Oss Siccome l'azione di  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  su  $\mathbb{H}^n$  è libera,  $\Gamma$  non contiene elementi ellittici.

Def Un semispazio di  $\mathbb{H}^n$  è la chiusura di una componente connessa di  $\mathbb{H}^n \setminus H$  dove  $H$  è un sottospazio totalmente geodetico  $(n-1)$ -dimensionale.

Def Una varietà iperbolica con bordo geodetico è uno spazio topologico  $M$  munito di una distanza  $d_M$  tale che  $(M, d_M)$  è localmente isometrico a un semispazio di  $\mathbb{H}^n$ , ovvero esiste una collezione di carte  $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$  e  $V_i$  è un aperto di un semispazio di  $\mathbb{H}^n$ .

Oss Se  $M$  è una  $n$ -varietà iperbolica con bordo geodetico allora  $\partial M$  è una varietà iperbolica di dimensione  $(n-1)$ .

Teorema 6.1.3. Ogni varietà iperbolica completa semplicemente connessa di dimensione  $n$  è isometrica all'intersezione di semispazi di  $\mathbb{H}^n$  con bordi disgiunti.

Dim: Possiamo definire la mappa sviluppante  $\text{dev}: M \rightarrow \mathbb{H}^n$  come nel

Teorema 6.1.1. L'unica differenza è che  $\text{dev}$  non è più surgettiva.

Allora  $M$  è isometrico a  $\text{dev}(M)$  il cui bordo è costituito da sottospazi di dimensione  $n-1$  totalmente geodetici.

Corollario 6.1.4 Ogni  $n$ -varietà iperbolica completa  $M$  con bordo geodetico è contenuta in una  $n$ -varietà iperbolica completa  $N$  senza bordo tale che  $N \setminus \text{int}(M)$  è omeomorfo a  $\partial M \times [0, +\infty)$

Dim: La stessa dimostrazione del Corollario 6.1.2 implica che  $M = \tilde{M}/\Gamma$  dove  $\tilde{M} \subset \mathbb{H}^n$  è l'intersezione di semispazi e  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  agisce in modo libero e propriamente discontinuo. Sia  $N = \mathbb{H}^n/\Gamma \supset M$ .

Per ogni  $p \in \partial M$  sia  $\gamma_p(t)$  la geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco passante per  $p$  e ortogonale a  $\partial M$ , diretta verso l'esterno.

La mappa  $\partial M \times [0, +\infty) \rightarrow N \setminus \text{int}(M)$  è un omeomorfismo.  
 $(p, t) \mapsto \gamma_p(t)$

Le varietà iperboliche con bordo geodetico sono utili perché possono essere incollate tra loro per produrre nuove varietà iperboliche: siano  $M$  e  $N$  varietà iperboliche con bordo geodetico e sia  $\psi: \partial M \rightarrow \partial N$  un'isometria. Sia  $M \cup_{\psi} N$  lo spazio topologico ottenuto quotiando l'unione disgiunta  $M \cup N$  per la relazione di equivalenza che identifica  $p$  con  $\psi(p)$ . La varietà  $M \cup_{\psi} N$  è iperbolica: basta incollare tra loro le carte di bordo di  $M$  ed  $N$  sfruttando il fatto che due sottospazi  $(n-1)$ -dimensionali totalmente geodetici in  $\mathbb{H}^n$  sono isometrici.

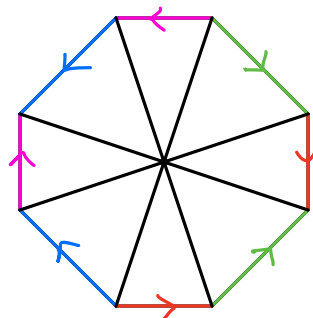
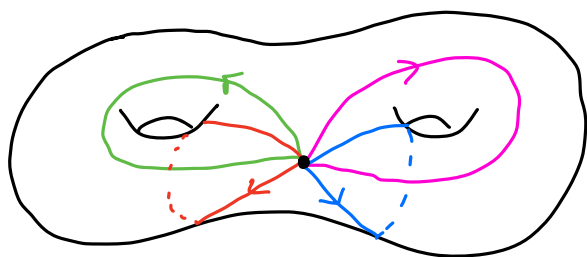
**Lemma 6.1.5.** Un sottogruppo  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  agisce in modo propriamente discontinuo se e solo se  $\Gamma < O^+(n, 1)$  è discreto.

Dim: Sia  $\Gamma$  discreto. Se l'azione di  $\Gamma$  non fosse propriamente discontinua esisterebbe un compatto  $K \subset \mathbb{H}^n$  e una successione  $\gamma_i \in \Gamma$  tale che  $\gamma_i(K) \cap K \neq \emptyset \quad \forall i \in \mathbb{N}$ . Allora, preso  $p \in K$ ,  $d(p, \gamma_i(p)) \leq 2 \text{diam}(K) \quad \forall i \in \mathbb{N}$ . Per Ascoli-Arzelà, la successione  $\gamma_i$  ammette una sottosuccessione convergente  $\gamma_{i_k}$ . Ma allora  $\alpha_k := \gamma_{i_k}^{-1} \circ \gamma_{i_{k+1}} \in \Gamma$  e converge a  $\text{id} \in \Gamma$ , contraddicendo il fatto che  $\Gamma$  è discreto.

Viceversa, se l'azione di  $\Gamma$  è propriamente discontinua allora  $\text{id} \in \Gamma$  è isolato (altrimenti una successione convergente a  $\text{id} \in \Gamma$  non soddisferebbe la definizione di propria discontinuità) e quindi ogni elemento di  $\Gamma$  è isolato, cioè  $\Gamma$  è discreto.

## 6.2. Costruzione di superfici iperboliche tramite incollamenti

Per ogni  $g \geq 0$ , sia  $S_g$  la somma connessa di  $g$ -tori. Per convenzione  $S_0 = S^2$  è la sfera. Il numero  $g$  è detto genere della superficie. Possiamo realizzare  $S_g$  topologicamente identificando i lati di un  $4g$ -gono



$g=2$

Tramite una suddivisione baricentrica del  $4g$ -gono otteniamo una triangolazione di  $S_g$  con 2 vertici,  $6g$  lati e  $4g$  facce per cui  $\chi(S_g) = 2 - 2g$ .

**Def** Siano  $g, b, n \in \mathbb{N}$ . La superficie  $S_{g,b,n}$  è ottenuta da  $S_g$  rimuovendo  $b$  pezzi disgiunti e  $n$  punti.

**Lemma 6.2.1**  $\chi(S_{g,b,n}) = 2 - 2g - b - n$ .

**Dim:** È sempre possibile trovare una triangolazione di  $S_g$  in modo tale che rimuovendo  $n$  vertici e la parte interna di  $b$  triangoli si ottiene una triangolazione di  $S_{g,b,n}$ . Quindi  $\chi(S_{g,b,n}) = \chi(S_g) - b - n$ .

**Teorema 6.2.2** Ogni superficie connessa compatta orientabile è omeomorfa a una  $S_{g,b} = S_{g,b,0}$  per qualche  $g, b \geq 0$ .

**Def** Un pantalone è la superficie  $S_{0,3}$ :



Proposizione 6.2.3. Dati tre numeri reali  $a, b, c \geq 0$  esiste un unico pantalone iperbolico completo con bordo geodetico e curve di bordo di lunghezza  $a, b, c$ , a meno di isometrie.

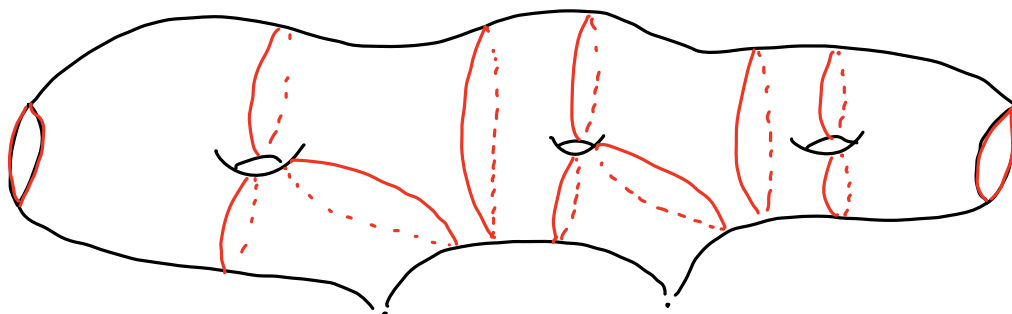
Dim: Per il Lemma 3.10 esiste un esagono retto con bordo geodetico e lati alterni di lunghezza  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ . Incollando due di essi lungo gli altri tre lati otteniamo una varietà iperbolica omeomorfa a  $S_{0,3}$  con bordi geodetici di lunghezza  $a, b, c$ .

Sia  $P$  un pantalone iperbolico con bordi  $C_1, C_2$  e  $C_3$  di lunghezza  $a, b, c > 0$ . Per compattezza, esistono punti  $x_1 \in C_1$  e  $x_2 \in C_2$  tali che  $d(x_1, x_2) = d(C_1, C_2)$ . La distanza tra  $x_1$  e  $x_2$  è realizzata da una geodetica  $\gamma_3$  ortogonale a  $C_1$  e  $C_2$ . Allo stesso modo costruiamo le geodetiche  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Tagliando lungo  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  otteniamo due esagoni retti con lati alterni di lunghezza  $L(\gamma_1), L(\gamma_2)$  e  $L(\gamma_3)$ . Per il Lemma 3.10 tali esagoni sono isometrici e dunque gli altri lati hanno lunghezza  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$  e  $\frac{c}{2}$ .

Se qualche componente di bordo ha lunghezza nulla, per esempio  $a=0$ , tronciamo il pantalone con un cerchio  $C_1$ . Possiamo applicare la costruzione precedente a questo pantalone (con bordo  $C_1$  non geodetico). Le geodetiche ortogonali a  $C_1$  puntano verso lo stesso punto all'infinito per cui  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  danno un esagono degenere.

**Teorema 6.2.4** Ogni superficie  $S_{g,b,n}$  con  $\chi(S_{g,b,n}) < 0$  ammette una metrica iperbolica completa con bordo geodetico di lunghezza arbitraria.

Dim: Se  $\chi(S_{g,b,n}) < 0$ ,  $S_{g,b,n}$  si ottiene incollando  $2g-2+b+n$  pantaloni.



$$\begin{aligned} g &= 3 \\ n &= 2 \\ b &= 2 \\ \# \text{pantaloni} &= 8 \end{aligned}$$

Il risultato segue allora dalla Proposizione 6.2.3.

**Teorema 6.2.5** Sia  $S_{g,b,n}$  una superficie iperbolica completa. Allora

$$\text{Area}(S_{g,b,n}) = -2\pi \chi(S_{g,b,n})$$

Dim: Decomponendo un esagono iperbolico retto in triangoli e applicando la formula per l'area di un triangolo iperbolico con dati angoli interni, si vede facilmente che l'area di un esagono iperbolico retto è  $4\pi - 6 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$ . Quindi un pantalone iperbolico ha area  $2\pi$ . Siccome  $S_{g,b,n}$  si ottiene incollando  $2g-2+b+n$  pantaloni abbiamo  $\text{Area}(S_{g,b,n}) = 2\pi(2g-2+b+n) = -2\pi \chi(S_{g,b,n})$

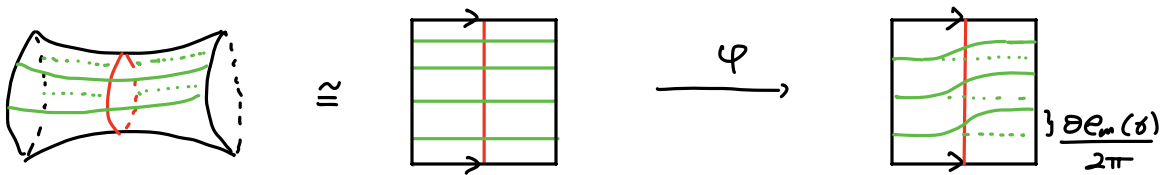
**Def** Lo spazio di Teichmüller  $\text{Teich}(S_{g,b,n})$  di una superficie  $S_{g,b,n}$  è l'insieme delle metriche iperboliche complete con bordo geodetico su  $S_{g,b,n}$  a meno di isometrie omotope all'identità.



Lo spazio dei moduli di  $S_{g,b,n}$  è l'insieme delle metriche iperboliche complete con bordo geodetico su  $S_{g,b,n}$  a meno di isometrie.

Sia  $m$  una metrica iperbolica completa su  $S_{g,b,n}$ . Sia  $\gamma: S^1 \rightarrow S_{g,b,n}$  una geodetica semplice, chiusa e non periferica. Sia  $\theta \in \mathbb{R}$  fissato.

Vogliamo costruire una nuova metrica iperbolica su  $S_{g,b,n}$ , che indichiamo con  $m_\theta$  ottenuta tagliando  $(S_{g,b,n}, m)$  lungo  $\gamma$  e reincollando i due pezzi dopo una rotazione di angolo  $\theta$ . Formalmente, costruiamo  $m_\theta$  nel modo seguente. Prendiamo  $R > 0$  sufficientemente piccolo in modo tale che  $e'$   $R$ -intorno di  $\gamma$  sia embedded e parametrizziamo  $e'$   $R$ -intorno con  $S^1 \times [-R, R]$  in modo tale che  $\{e^{it}\} \times [-R, R]$  sia il segmento geodetico ortogonale a  $\gamma$  e  $S^1 \times \{0\} \rightarrow \gamma$  sia una parametrizzazione di  $\gamma$ . Sia  $f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia tale che  $f|_{[-R, -R/2]} = 0$  e  $f|_{[R/2, R]} = \frac{\theta e_m(\gamma)}{2\pi}$ . Consideriamo allora la funzione data da

$$\varphi: S^1 \times [-R, R] \rightarrow S^1 \times [-R, R] \quad \varphi(e^{it}, s) = (e^{i(t+f(s))}, s).$$


La nuova metrica  $m_\theta$  è definita nel modo seguente: coincide con  $m$  nel complementare dell' $R$ -intorno di  $\gamma$  ed è il pull-back di  $m$  tramite  $\varphi$  sull' $R$ -intorno.

**Lemma 6.2.6** Sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa non periferica in una 51

superficie iperbolica completa. Allora  $\gamma$  è omotopa a un'unica geodetica.

Dim: Realizziamo la superficie come quoziente  $M = \tilde{M}/\Gamma$  di un dominio  $\tilde{M}$  di  $\mathbb{H}^2$  con bordo geodetico per l'azione di  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ .

C'è una bigezione

$$\{\text{classi di coniugio in } \Gamma\} \longleftrightarrow \{\text{curve chiuse in } M\}$$

ottenuta associando a  $\varphi \in \Gamma$  la curva chiusa in  $M$  data dalla proiezione di un arco che connette  $x \in \tilde{M}$  e  $\varphi(x)$ .

Sia  $\varphi_\gamma \in \Gamma$  l'elemento corrispondente alla classe di coniugio di  $\gamma$ .

Osserviamo che  $\varphi_\gamma$  non può essere un'isometria ellittica perché l'azione di  $\Gamma$  non ha punti fissi; non può essere neanche parabolica perché altrimenti troveremmo curve omotope a  $\gamma$  di lunghezza arbitrariamente piccola contraddicendo il fatto che non sia periferica.

Quindi  $\varphi_\gamma$  èloxodromica e dunque preserva una geodetica di  $\mathbb{H}^2$ .

La sua proiezione su  $M$  è una geodetica nella classe di omotopia libera di  $\gamma$ .

Supponiamo ora che ci siano due geodetiche  $\alpha$  e  $\alpha'$  omotope a  $\gamma$ .

Per compattezza, esiste  $C \geq 0$  tale che ogni punto di  $\alpha$  è mosso di al più una distanza  $C$  dall'omotopia. Sollevando al rivestimento universale, questo vuol dire che ogni punto del sollevamento  $\tilde{\alpha}$  è a distanza limitata da  $\tilde{\alpha}'$ . Questo è possibile solo se  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}'$ .

$$E_\gamma: \mathbb{R} \times \text{Teich}(S_{g,b,n}) \longrightarrow \text{Teich}(S_{g,b,n})$$

$$(\partial, m) \longmapsto m_\partial^\gamma$$

è ben definita ed è un'azione di  $\mathbb{R}$  su  $\text{Teich}(S_{g,b,n})$ , ovvero  $E_\gamma(\partial + \partial', m) = E_\gamma(\partial, E_\gamma(\partial', m))$ . Inoltre  $E_\gamma$  dipende solo dalla classe di omotopia di  $\gamma$ .

Dim: Dal Lemma 6.2.5 sappiamo che in ogni classe di omotopia di curve semplici chiuse esiste un'unica geodetica per una data metrica  $m$ . L'unica ambiguità nella definizione di  $m_\partial^\gamma$  rimane allora nella scelta della funzione  $f: [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}$ . Ma se scegliamo un'altra funzione  $\tilde{f}$  con le stesse proprietà, la metrica ottenuta  $\tilde{m}_\partial^\gamma$  differisce da  $m_\partial^\gamma$  per un'isometria omotopa all'identità: basta prendere l'omeomorfismo di  $S_{g,b,n}$  che è l'identità al di fuori dell' $R$ -intorno di  $\gamma$  e sull'anello manda  $(e^{it}, s)$  in  $(e^{i(t + f(s) - \tilde{f}(s))}, s)$ .

$E_\gamma$  è un'azione di  $\mathbb{R}$  in quanto  $m_{\partial + \partial'}^\gamma = (m_{\partial'}^\gamma)_\partial^\gamma$ : infatti  $\gamma$  rimane geodetica anche dopo un terremoto e quindi si può prendere lo stesso  $R$ -intorno per comporre due terremoti lungo la stessa curva.

**Proposizione 6.2.8.** Siano  $\gamma$  e  $\eta$  due curve semplici chiuse non periferiche e sia  $m$  una metrica iperbolica su  $S_{g,b,n}$ . La funzione

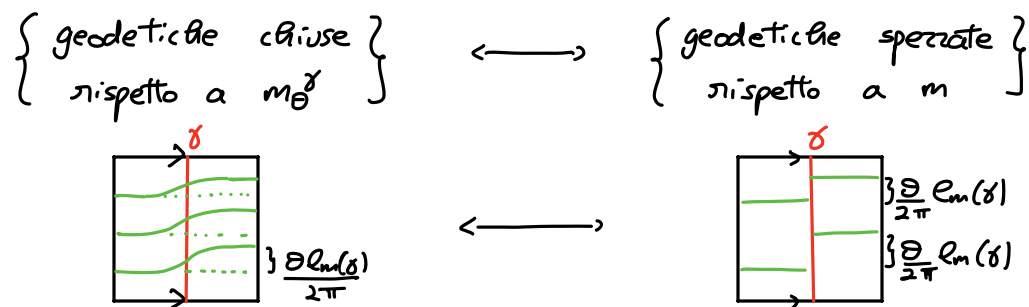
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\theta \longmapsto \ell_{m_\theta}^\delta(\gamma)$$

è strettamente convessa e propria se  $\gamma \cap \gamma \neq \emptyset$ .

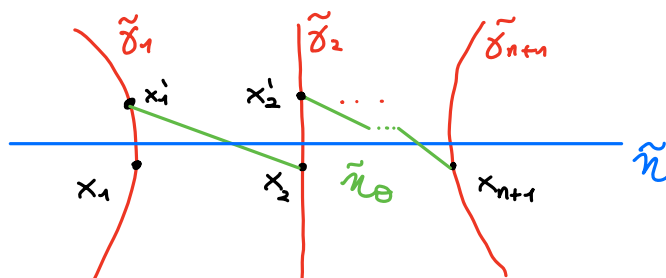
Dim: Sia  $\gamma_\theta$  la geodetica omotopa a  $\gamma$  per la metrica  $m_\theta^\delta$ . Supponiamo che  $\gamma_\theta$  intersechi  $\gamma$  trasversalmente in  $n > 0$  punti.

Fissiamo  $R > 0$  sufficientemente piccolo e prendiamo un  $R$ -intorno di  $\gamma$ . La geodetica  $\gamma_\theta^\delta$  può essere vista nella metrica  $m$  nel modo seguente: al di fuori dell'anello è una geodetica per  $m$  e viene deviata di  $\frac{\partial \ell_m(\delta)}{2\pi}$  ogni volta che entra nell'anello. Sostituendo tali deviazioni discrete con curve spezzate, come in figura, otteniamo una bigezione



Questa corrispondenza preserva la lunghezza delle curve.

Passiamo allora al rivestimento universale in  $\mathbb{H}^2$ . Fissiamo un sollevamento  $\tilde{\gamma}$  di  $\gamma$  e prendiamo  $n+1$  punti di intersezione consecutivi tra  $\tilde{\gamma}$  e i sollevamenti di  $\gamma$ . Sia  $\tau_\gamma$  l'isometria Poxodromica di asse  $\tilde{\gamma}$  corrispondente a  $\gamma$ .



$$\tau_\gamma(\tilde{\gamma}_1) = \tilde{\gamma}_{n+1}$$

Parametizziamo ciascun  $\tilde{\gamma}_i$  per lunghezza d'arco in modo che  
 e' immagine di  $0 \in \mathbb{R}$  sia il punto di intersezione tra  $\tilde{\gamma}_i$  e  $\tilde{\gamma}_{i+1}$ .

Un sollevamento della geodetica spezzata  $n_\theta$  parte da un punto

$x_1' = x_1 - \frac{\partial \ell_m(\delta)}{2\pi} \in \tilde{\gamma}_1$  e arriva ad un punto  $x_2 \in \tilde{\gamma}_2$  per poi  
 ripartire dal punto  $x_2' = x_2 - \frac{\partial \ell_m(\delta)}{2\pi}$  e continua così fino ad  
 arrivare nel punto  $x_{n+1} = \tau_n(x_1) \in \tilde{\gamma}_{n+1}$ .

Se facciamo variare i punti  $x_i \in \tilde{\gamma}_i$  otteniamo varie geodetiche  
 spezzate ma solo una di queste interseca in arrivo e in partenza  
 $\tilde{\gamma}_i$  con lo stesso angolo e quindi rappresenta la geodetica  $\tilde{n}_\theta$ .

Tutte le altre curve si proiettano a curve omotope a  $n$  per cui  
 avranno lunghezza maggiore di  $\ell_{m_\theta}(n_\theta)$  rispetto alla metrica  $m_\theta$ .

Quindi

$$\ell_{m_\theta}(n_\theta) = \min \left\{ \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{H}^2} \left( x_i - \frac{\partial \ell_m(\delta)}{2\pi}, x_{i+1} \right) \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$\text{e } x_{n+1} = \tau_n(x_1)$$

Consideriamo allora la funzione

$$\psi: \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n d_{\mathbb{H}^2}(y_i, x_{i+1})$$

dove  $x_{n+1} = \tau_n(x_1)$ : per la proposizione 5.3.1  $\psi$  è strettamente  
 convessa e propria. La funzione

$$\phi: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, \theta) \longmapsto \psi(x)$$

è convessa ma la sua restrizione al sottospazio  $H$  definito 55

dalle equazioni:  $y_i = x_i - \frac{\partial \ell_m(\delta)}{2\pi}$  e' strettamente convessa perche'

$H$  non e' parallelo alla direzione  $(0, 0, \dots, 1)$ . Ma allora

$$\vartheta \longmapsto \ell_{m_\vartheta}(n_\vartheta) = \min_{x \in H} f|_{H \times \{\vartheta\}}$$

e' strettamente convessa e propria (vedi foglio di esercizi).

**Corollario 6.2.9** Sia  $\gamma$  una curva semplice chiusa non periferica, allora l'azione di terremoto  $E_\gamma$  e' libera.

Dim: Se avessimo  $m = m_\vartheta$  per qualche  $\vartheta > 0$ , la funzione  $\vartheta \mapsto \ell_{m_\vartheta}(n)$  sarebbe costante su  $\{n\vartheta_0 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Scegliendo  $n$  come nella Proposizione 6.2.8, questo contraddirebbe la stretta convessita' di  $\ell_{m_\vartheta}(n)$ .

Piu' in generale, possiamo definire l'azione di terremoto su una multicurva  $\mu = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ , ovvero sull'unione di curve semplici chiuse disgiunte non periferiche e a due a due non omotope, ponendo

$$E_\mu: \mathbb{R}^k \times \text{Teich}(S_{g,b,n}) \longrightarrow \text{Teich}(S_{g,b,n})$$

$$(\vartheta, m) \longmapsto m_\vartheta^\mu$$

dove  $m_\vartheta^\mu := E_{\gamma_n}(\vartheta_n, E_{\gamma_{n-1}}(\vartheta_{n-1}, E_{\gamma_2}(\vartheta_2, E_{\gamma_1}(\vartheta_1, m)))$ . Nota che l'azione di terremoto su curve disgiunte commuta.

**Corollario 6.2.10** Per ogni multicurva  $\mu$ , l'azione di terremoto e' libera.

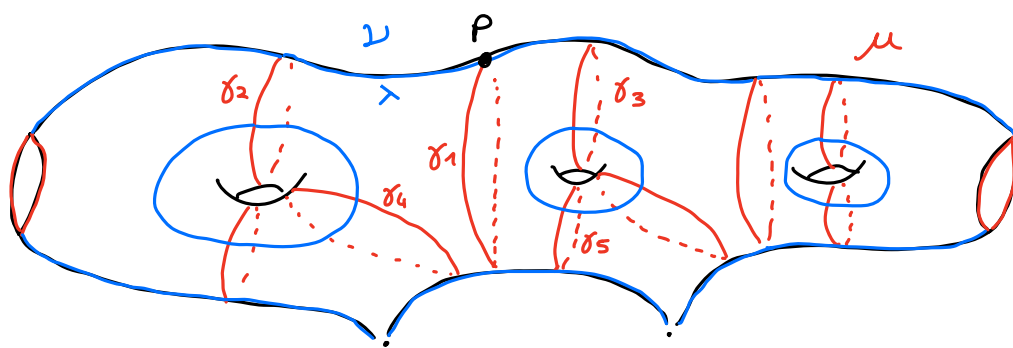
Dim: Se  $m = m_{\vartheta_0}^\mu$  per qualche  $\vartheta_0 = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_k) \neq (0, \dots, 0)$ , esiste un indice  $i$  tale che  $\vartheta_i \neq 0$ . Si ripete allora l'argomento del

Corollario 6.2.9 prendendo  $n$  tale che  $n \wedge \gamma_i \neq \emptyset$  e

$$\eta \cap \gamma_j = \emptyset \quad \text{per } j \neq i.$$

**Def** Un frame di  $S_{g,b,n}$  è il dato di due multicurve  $\mu$  e  $\nu$  tali che:

- i)  $\mu$  è una decomposizione in pantaloni di  $S_{g,b,n}$
- ii)  $\nu$  decompone ogni pantalone in due esagoni retti (eventualmente degeneri). In  $\nu$  è permesso l'uso di archi che connettono curve di bordo o punte



Osserviamo che  $\mu$  è l'unione di  $3g + 2b + n - 3$  curve semplici chiuse di cui  $3g + b + n - 3$  interne. Il numero di curve o archi in  $\nu$  dipende dalla particolare scelta di  $\nu$ .

Definiamo le coordinate di Fenchel-Nielsen

$$\begin{aligned} \text{FN: } \text{Teich}(S_{g,b,n}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{3g+2b+n-3} \times \mathbb{R}^{3g+b+n-3} \\ m &\longmapsto (\ell_m(\gamma_i), \theta_i) \end{aligned}$$

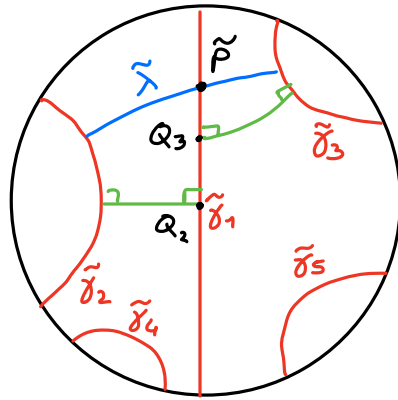
nel modo seguente. Le prime  $3g + 2b + n - 3$  coordinate sono le lunghezze delle geodetiche per  $m$  omotope alle curve  $\gamma_i$  che costituiscono  $\mu$ .

I parametri  $\theta_i$  indicano invece come i pantaloni sono incollati tra loro.

e sono definiti solo per le curve interne di  $\mu$ . Per semplicità definiamo

$\theta_1$ . Sia  $\lambda$  un arco (o curva) di  $\nu$  che interseca  $\gamma_1$ . Sollevando 57

al rivestimento universale  $\mathbb{H}^2$  i due pantaloni adiacenti a  $\gamma_1$  otteniamo la figura seguente:



dove le curve verdi sono le uniche geodetiche ortogonali a  $\tilde{\gamma}_1$  e  $\tilde{\gamma}_i$  per  $i=2,3$ .

Siano  $Q_i$  le intersezioni di tali geodetiche con  $\tilde{\gamma}_1$ . Sia  $s_1$  la distanza con segno tra  $Q_2$  e  $Q_3$ , dove  $s_1$  ha segno positivo se  $Q_3$  è a sinistra di  $Q_2$  muovendosi lungo la geodetica ortogonale tra  $\tilde{\gamma}_2$  e  $\tilde{\gamma}_1$  verso  $\tilde{\gamma}_1$ .

Si pone allora  $\theta_1 = \frac{2\pi s_1}{l_m(\gamma_1)}$ .

**Teorema 6.2.11** La mappa  $FN$  è una bigezione.

Dim:

- **Surgettività:** per ogni  $(e_1, \dots, e_{3g+2b+n-3})$ , possiamo usare la Proposizione 6.2.3 per costruire una metrica iperbolica  $m$  con  $e_m(\gamma_i) = e_i$ . Tale  $m$  avrà parametri  $\theta'_i$ . Agendo con un terremoto lungo  $\mu$  possiamo variare tali parametri arbitrariamente senza variare le lunghezze. Infatti se  $m$  ha parametro  $\theta'_i$  lungo  $\gamma_i$ , allora  $m_{\theta'_i}^{\gamma_i}$  ha parametro  $\theta'_i + \theta_i$  lungo  $\gamma_i$ .
- **Iniettività:** se  $FN(m) = FN(m')$ , a meno di agire con un terremoto possiamo supporre che  $FN(m) = (e_1, \dots, e_{3g+2b+n-3}, 0, \dots, 0)$ . In questo caso le geodetiche ortogonali alle curve di  $\mu$  si incollano e [58]



costituiscono una multicurva omotopa a  $\nu$ . Allora  $S_{g,b,n}(\mu \cup \nu)$  è una decomposizione di  $S_{g,b,n}$  in esagoni retti per entrambe le metriche  $m$  e  $m'$ . Siccome gli esagoni retti hanno lati alterni della stessa lunghezza sia per  $m$  che per  $m'$ , sono isometrici e dunque le due metriche iperboliche sono isometriche.

Oss Nella dimostrazione del Teorema 6.2.11 è emerso questo fatto: i parametri di Fenchel Nielsen sono tutti nulli se e solo se i rappresentanti geodetici di  $\mu$  e  $\nu$  sono mutualmente ortogonali.

Vediamo ora un altro modo per costruire strutture iperboliche su superfici con punture  $S_{g,n}$  con  $\chi(S_{g,n}) < 0$ .

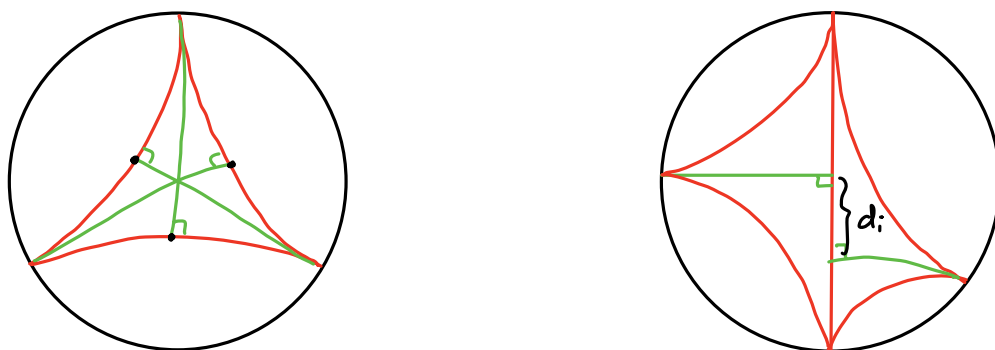
Def Una triangolazione ideale di  $S_{g,n}$  è una triangolazione di  $S_g$  in cui i vertici sono rimossi e corrispondono alle  $n$  punture.

Lemma 6.2.12 Ogni superficie  $S_{g,n}$  con  $\chi(S_{g,n}) < 0$  ammette una triangolazione ideale. Inoltre se  $\chi(S_{g,n}) = -k$  allora una triangolazione ideale di  $S_{g,n}$  è costituita da  $2k$  triangoli.

Sia  $\{\Delta_1, \dots, \Delta_{2k}\}$  una triangolazione ideale di  $S_{g,n}$ . Sostituiamo ogni  $\Delta_i$  con un triangolo ideale in  $\mathbb{H}^2$  (che è unico a meno di isometrie) e incolliamo i vari triangoli lungo i lati tramite un'isometria che inverte l'orientazione. Otteniamo allora una struttura iperbolica su  $S_{g,n}$  con area  $k\pi$ .

I lati della triangolazione hanno lunghezza infinita ma le isometrie usate

per gli incollamenti non sono uniche: c'è una famiglia ad un parametro di isometrie per ogni lato. La struttura iperbolica su  $S_{g,n}$  dipende da tale scelta. Possiamo parametrizzare tutte le metriche iperboliche ottenute in questo modo tramite le coordinate di shear. Ogni lato di un triangolo ideale ha un punto medio



Il parametro di shear  $d_i$  è la distanza con segno tra i punti medi di due triangoli ideali adiacenti.

**Proposizione 6.2.13** Sia  $m$  una metrica iperbolica completa su  $S_{g,n}$  ottenuta con la procedura descritta prima. Il suo rivestimento universale è isometrico all'intersezione di semipiani di  $\mathbb{H}^2$  con bordi disgiunti.

Dim: Costruiamo la mappa sviluppante dev:  $\tilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^2$  nel modo seguente.

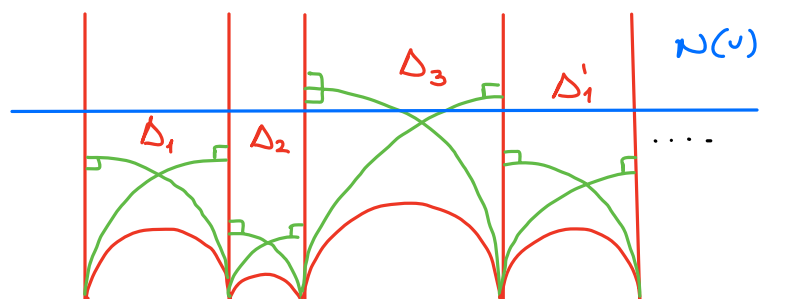
La triangolazione geodetica di  $M = (S_{g,n}, m)$  si solleva a una triangolazione geodetica di  $\tilde{M}$ . Scegliamo un triangolo della triangolazione e definiamo dev in modo che tale triangolo venga mandato in un dato triangolo ideale di  $\mathbb{H}^2$  fissato. Estendiamo poi dev a tutta  $\tilde{M}$  procedendo triangolo per triangolo rispettando le coordinate di shear. È chiaro che dev:  $\tilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^2$  così definita è iniettiva.

Identifichiamo allora  $\tilde{M}$  con  $\text{dev}(\tilde{M}) \subseteq \mathbb{H}^2$ . Sia  $x \in \partial \tilde{M}$ . Ogni intorno di  $x$  deve intersecare infiniti triangoli della triangolazione, per cui esiste una successione di lati  $e_i$  tali che  $d_{\mathbb{H}^2}(e_i, x) \rightarrow 0$  in modo monotono decrescente. Siccome  $e_i$  sono disgiunti, la successione dei loro punti all'infinito è anch'essa monotona e dunque convergente. Tali punti determinano una geodetica  $\gamma$  tale che  $d(x, \gamma) = 0$  e dunque  $x \in \gamma$  e  $\gamma \subseteq \partial \tilde{M}$ . Questo dimostra la tesi.

Siamo interessati a metriche iperboliche complete per cui vogliamo capire quali condizioni imporre sulle coordinate di shear in modo tale che la mappa sviluppante sia surgettiva. Sia  $v$  un vertice ideale della triangolazione e siano  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  i triangoli in  $S_{g,n}$  adiacenti a  $v$ . Siano  $d_1, \dots, d_n$  le coordinate di shear di tali triangoli relative agli  $n$  lati uscenti da  $v$ . Sia  $N(v)$  un piccolo disco bucato (in  $v$ ) attorno a  $v$ .

**Proposizione 6.2.14** La restrizione della metrica a  $N(v)$  è completa se e solo se  $d_1 + \dots + d_n = 0$ .

Dim: Costruiamo la mappa sviluppante nel modello del semipiano come prima mandando il primo triangolo  $\Delta_1$  in un triangolo ideale con un vertice in  $\infty$ .



$n = 3$

Sviluppiamo i vari triangoli  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  e le loro copie  $\Delta'_1, \dots, \Delta'_n$ .

Sia  $\varphi \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  l'unica isometria che manda  $\Delta_1$  in  $\Delta'_1$ . Se  $d_1 + \dots + d_n = 0$  allora i punti medi di  $\Delta_1$  e  $\Delta'_1$  sono alla stessa altezza e dunque  $\varphi$  è parabolica. Quindi  $N(v)$  è isometrico ad un troncamento della cuspide  $\mathbb{H}^2 / \langle \varphi \rangle$ , che è completa.

Se  $d_1 + \dots + d_n \neq 0$  i punti medi di  $\Delta_1$  e  $\Delta'_1$  sono ad altezze diverse e, siccome  $\infty \in \text{Fix}(\varphi)$ ,  $\varphi$  deve essereloxodromica con un certo asse.

A meno di postcomporre tutta la costruzione con una isometria, possiamo supporre che tale asse sia l'asse immaginario e dunque  $\varphi(z) = e^d z$  dove  $d = d_1 + \dots + d_n$ . L'asse immaginario è di accumulazione per la mappa sviluppante ma non sta nell'immagine, dunque  $N(v)$  non è completo.

**Corollario 6.2.15** Una struttura iperbolica su  $S_{g,n}$  è completa se e solo se  $d_1 + \dots + d_n = 0$  per ogni vertice ideale della triangolazione.

Dim: Detti  $v$  i vertici ideali,  $S_{g,n} \setminus \bigcup_v N(v)$  è compatta, dunque completa.

Di conseguenza la struttura iperbolica su  $S_{g,n}$  è completa se e solo se lo è su ogni  $N(v)$  e la tesi segue dal Corollario 6.2.14.

**Proposizione 6.2.16** Sia  $\mathbb{H}^2 / \Gamma$  una superficie iperbolica completa con punture e senza bordo. Ogni triangolazione ideale di  $\mathbb{H}^2 / \Gamma$  è omotopa a un'unica triangolazione ideale geodetica.

Dim: Tronchiamo le cuspidi di  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  in modo da ottenere una sotto superficie  $\Sigma$  compatta. La triangolazione ideale di  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  è troncata a una decomposizione in esagoni di  $\Sigma$ . Sollevando al rivestimento universale, ciascun esagono ha tre lati lungo orocicli (quelli corrispondenti ai troncamenti) e i lati interni della triangolazione collegano due orocicli distinti. Tali orocicli sono centrati in punti distinti di  $\partial\mathbb{H}^2$  e quindi determinano un'unica geodetica di  $\mathbb{H}^2$ . Questa procedura fornisce una triangolazione ideale di  $\mathbb{H}^2$   $\Gamma$ -invariante che si proietta su  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  ad una triangolazione ideale geodetica omotopa a quella iniziale.

Le coordinate di shear forniscono una diversa parametrizzazione di  $\text{Teich}(S_{g,n})$ . Sia  $-K = \mathcal{X}(S_{g,n})$  e sia  $V \subset \mathbb{R}^{3K}$  lo sottospazio di dimensione  $3K - n$  dato da tutte le coordinate di shear  $(d_1, \dots, d_{3K})$  che soddisfanno le  $n$  equazioni di completezza.

**Teorema 6.2.17** La mappa  $sh: \text{Teich}(S_{g,n}) \longrightarrow V$  che associa ad ogni metrica iperbolica completa le sue coordinate di shear è una bigezione.

Dim: Per la Proposizione 6.2.16 la mappa  $sh$  è ben definita ed iniettiva. È surgettiva per la Proposizione 6.2.14.

### 6.3. Costruzione di 3-varietà iperboliche tramite incollamenti

In questa sezione spiegheremo come costruire 3-varietà iperboliche compatte incollando tetraedri ideali. Iniziamo a studiare gli invarianti isometrici di un tetraedro ideale di  $\mathbb{H}^3$ . In tutta la sezione useremo il modello del semispazio di  $\mathbb{H}^3$  e identificheremo  $\partial_\infty \mathbb{H}^3$  con  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

Sia  $T$  un tetraedro ideale di  $\mathbb{H}^3$  e sia  $e \in T$  un suo lato. Esiste un'unica isometria di  $\mathbb{H}^3$  che manda i vertici di  $e$  in  $0$  e  $\infty$ , un terzo vertice in  $1$  e il quarto vertice in  $z \in \mathbb{C}$  con  $\text{Im}(z) > 0$ . Tale  $z = z(e)$  è detto edge invariant di  $e \in T$ .

**Lemma 6.3.1.** Sia  $T$  un tetraedro con lato  $e_1$  e vertici  $0, \infty, 1$  e  $z(e_1)$ .

Allora gli altri edge invariant di  $T$  sono:

- se  $e_1'$  è il lato opposto a  $e_1$ ,  $z(e_1') = z(e_1)$
- il lato  $e_2$  di vertici  $\infty$  e  $1$  ha  $z(e_2) = \frac{1}{1 - z(e_1)}$
- il lato  $e_3$  di vertici  $\infty$  e  $z(e_1)$  ha  $z(e_3) = \frac{z(e_1) - 1}{z(e_1)}$

Inoltre valgono le relazioni

$$z(e_1)z(e_2)z(e_3) = -1$$

$$1 - z(e_1) + z(e_1)z(e_3) = 0$$

Dim: • Sia  $e_3'$  il lato opposto a  $e_3$ , ovvero  $e_3'$  è il lato di vertici  $0$  e  $1$ .

Sia  $\gamma$  la geodetica ortogonale a  $e_3$  ed  $e_3'$ . L'isometria ellittica  $\varphi$  che ruota attorno a  $\gamma$  di  $\pi$  soddisfa

$$\varphi(0) = 1 \quad \varphi(1) = 0 \quad \varphi(\infty) = z \quad \varphi(z) = \infty$$

quindi preserva  $T$  e manda  $e_1'$  in  $e_1$  quindi  $z(e_1') = z(e_1) = z$ .

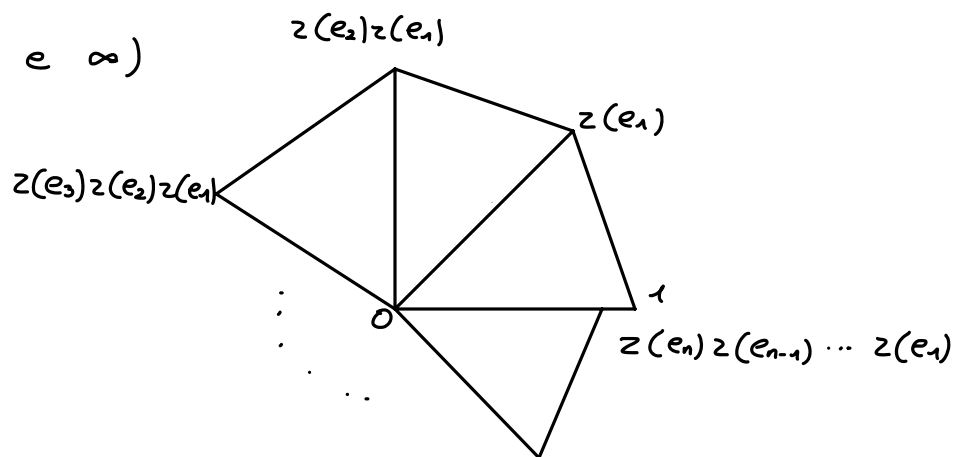
- La trasformazione di Möbius

$$\psi(w) = \frac{w-1}{z-1}$$

rimormalizza il lato  $e_2$  mandando  $z$  in  $1$ . Quindi  $z(e_2) = \psi(0) = \frac{1}{1-z}$ .

- Il ragionamento è analogo al punto precedente considerando la trasformazione di Möbius  $\psi(w) = \frac{w-z}{-z}$ .

Incolliamo ora tetraedri ideali  $T_1, \dots, T_n$ . Supponiamo che  $T_1$  e  $T_2$  siano incollati lungo una faccia  $F_1 \subset T_1$  e sia  $e_1 \in F_1$  un lato lungo il quale avviene l'incollamento. Rimormalizziamo  $T_1$  rispetto a  $e_1$  in modo che abbia vertici in  $0, 1, \infty$  e  $z(e_1)$ . Sia  $e_2 \in T_2$  il lato incollato a  $e_1$ . Supponiamo che l'incollamento avvenga lungo la faccia di vertici  $0, z(e_1)$  e  $\infty$ . Sia  $F_2 \subset T_2$  la faccia incollata a  $F_1$ . Rimormalizziamo il tetraedro  $T_2$  rispetto al lato  $e_2$  in modo che  $F_2$  abbia vertici in  $0, \infty$  e  $z(e_1)$ . Allora il quarto vertice si troverà nel punto  $z(e_2)z(e_1)$ . Continuando questa procedura otterremo una figura di questo tipo (i tetraedri sono visti dall'alto e incollati lungo i lati  $0$  e  $\infty$ )



**Teorema 6.3.2** Supponiamo che la triangolazione topologica produca una 3-varietà topologica  $M$ , non compatta, orientabile e senza bordo. Allora la triangolazione geometrica fornisce una struttura iperbolica se e solo se  $\prod_i z(e_i) = 1$  e  $\sum_i \arg(z(e_i))$

$= 2\pi$ , dove la somma e il prodotto variano su tutti i cati incidenti ad  $e$ .

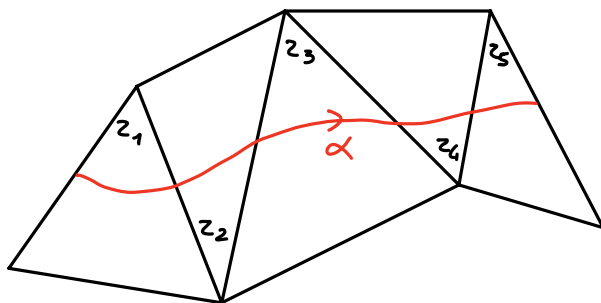
Dim:  $M$  ha una struttura iperbolica se e solo se ogni punto ha un intorno isometrico a una palla di  $\mathbb{H}^3$ . Sia  $p$  un punto sul lato  $e$ . Se  $p$  ha un intorno isometrico a una palla di  $\mathbb{H}^3$  allora la somma degli angoli diedrali attorno ad  $e$  deve essere  $2\pi$ . Tale somma è esattamente  $\sum_i \arg(z(e_i))$ . Inoltre l'ultimo tetraedro si incolla al primo se e solo se  $\prod_i z(e_i) = 1$ .

Viceversa se le equazioni sono verificate e' chiaro che ogni punto ha un intorno isometrico a una palla di  $\mathbb{H}^3$ .

Le equazioni del Teorema 6.3.1 sono dette equazioni di incollamento. La varietà iperbolica  $M$  ottenuta incollando tetraedri ideali che soddisfano tali equazioni non è necessariamente completa. Supponiamo che rimuovendo un intorno dei vertici ideali si ottenga una varietà  $N$  con bordo torico incom.  
 $\pi_1(\partial N) \hookrightarrow \pi_1(M)$   
primibile (vedremo che questa ipotesi è sempre verificata nelle 3-varietà iperboliche complete non compatte e di volume finito). Vogliamo determinare condizioni sugli edge invariant che garantiscano che la varietà  $N$  sia completa. Troncando la triangolazione ideale che realizza  $M$  rimuovendo un intorno centrato nei vertici ideali otteniamo una triangolazione di  $\partial N$  che, per ipotesi, è unione di tori. Lavoriamo separatamente per ciascuna componente di bordo. Vogliamo definire un invariante associato ad ogni classe di omotopia  $[\alpha] \in \pi_1(T^2)$ . Realizziamo  $[\alpha]$  come cammino  $\alpha$



orientato di  $T_2$ . A meno di omotopia possiamo supporre che  $\alpha$  intersechi la triangolazione in modo monotono e trasverso. Etichettiamo i vari vertici dei triangoli con  $e$  edge invariant del lato del tetraedro ideale a cui appartengono come in figura.



Definiamo  $H(\alpha) = \prod_{i=1}^n z_i^{\epsilon_i}$  dove  $z_1, \dots, z_n$  sono gli edge invariant dei vertici tagliati da  $\alpha$  come in figura e

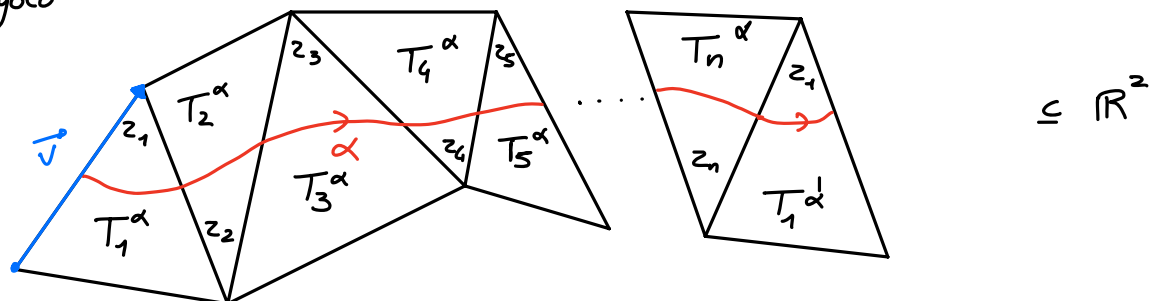
$$\epsilon_i = \begin{cases} +1 & \text{se il vertice } e \text{ è alla sinistra di } \alpha \\ -1 & \text{se il vertice } e \text{ è alla destra di } \alpha \end{cases}$$

Usando le relazioni tra gli edge invariants nel Lemma 6.3.1 si può verificare che  $H(\alpha)$  dipende solo dalla classe di omotopia di  $\alpha$ .

**Lemma 6.3.3.** Il toro di bordo ha una struttura Euclidea (ovvero è isometrico a  $\mathbb{R}^2/\Gamma$  dove  $\Gamma$  è un sottogruppo di traslazioni) se e solo se  $H(\alpha) = H(\beta) = 1$  per generatori  $\alpha, \beta \in \pi_1(T^2)$ .

Dim: Ogni triangolo della triangolazione del toro proviene dal troncamento di un tetraedro ideale lungo un'orosfera. Dunque ogni triangolo ha una struttura Euclidea indotta dall'orosfera. Possiamo costruire la mappa sviluppante e l'olonomia  $\rho$  come abbiamo visto per le triangolazioni di superfici iperboliche. Presa  $[\alpha] \in \pi_1(T^2)$  e

rappresentata tramite un cammino orientato come sopra, consideriamo l'immagine tramite la mappa sviluppante di ogni triangolo intersecato da  $\alpha$   $T_1^\alpha, \dots, T_n^\alpha$  finché non ricompare un'altra copia  $T_1^\alpha$  del primo triangolo



la stessa costruzione si ripete per l'altro generatore  $\beta \in \pi_1(T^2)$ .

Il toro ammette una struttura Euclidea se e solo se le isometrie  $p(\alpha)$  e  $p(\beta)$  che mandano  $T_1^\alpha$  in  $T_1^{\alpha'}$  e  $T_1^\beta$  in  $T_1^{\beta'}$  rispettivamente sono traslazioni. Mostriamo che questo succede se e solo se  $H(\alpha) = H(\beta) = 1$ .

Prendiamo il vettore  $\vec{v}$  diretto lungo il primo lato di  $T_1^\alpha$  e della sua stessa lunghezza. Pensiamolo come vettore per l'origine di  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ .

In riferimento alla figura, la moltiplicazione per  $z_1$  manda  $\vec{v}$  nel vettore (per l'origine) nella stessa direzione e della stessa lunghezza del lato che  $T_1^\alpha$  ha in comune con  $T_2^\alpha$ . Moltiplicando poi per  $z_2^{-1}$  tale vettore è mandato nel vettore con la stessa direzione e lunghezza del lato in comune tra  $T_2^\alpha$  e  $T_3^\alpha$ . Quindi  $H(\alpha)\vec{v}$  è il vettore per l'origine con la stessa direzione e stessa lunghezza di  $p(\alpha)\vec{v}$ . Ma allora  $p(\alpha)$  è una traslazione se e solo se  $H(\alpha) = 1$ .

**Lemma 6.3.4** La varietà  $M$  è completa se e solo se  $\partial N$  ha una struttura Euclidea.

Dim:  $\Leftarrow$  Osserviamo che  $M \setminus N$  è isometrico a  $\partial N \times [0, +\infty)$ . Se  $\partial N$  ha una struttura Euclidea completa allora  $M$  si decompone in una parte compatta  $N$  e una completa  $\partial N \times [0, +\infty)$  per cui è completa.

$\Rightarrow$  Se  $M$  è completa allora  $M = \mathbb{H}^3 / \Gamma$ . Siccome  $\partial N$  è incompressibile, ogni  $[\alpha] \in \pi_1(\partial N)$  non banale corrisponde a un elemento  $\tau_\alpha \in \Gamma$ ,  $\tau_\alpha \neq \text{id}$ .  $\tau_\alpha$  non è ellittico perché l'azione di  $\Gamma$  su  $\mathbb{H}^3$  è libera.  $\tau_\alpha$  non èloxodromico perché altrimenti  $M$  non sarebbe completa per lo stesso argomento della Proposizione 6.2.14. Quindi  $\tau_\alpha$  è parabolica  $\forall [\alpha] \in \pi_1(\partial N)$  non banale. Ogni componente  $\partial N_i \subset \partial N$  si ottiene quotiendando un'orosfera per l'azione delle isometrie paraboliche in  $\pi_1(\partial N)$ , che agiscono come traslazioni. Quindi  $\partial N$  ha una struttura Euclidea.

#### 6.4. Struttura iperbolica sul complementare del nodo a figura otto

Un nodo  $K$  in  $S^3$  è un embedding  $f: S^1 \rightarrow S^3$ . Un link è un'unione disgiunta di nodi. Due nodi  $K_1, K_2 \subset S^3$  sono equivalenti se esiste un'omotopia  $h: S^3 \times [0, 1] \rightarrow S^3$  tale che

- $h_t = h|_{S^3 \times \{t\}}$  è un omeomorfismo  $\forall t \in [0, 1]$

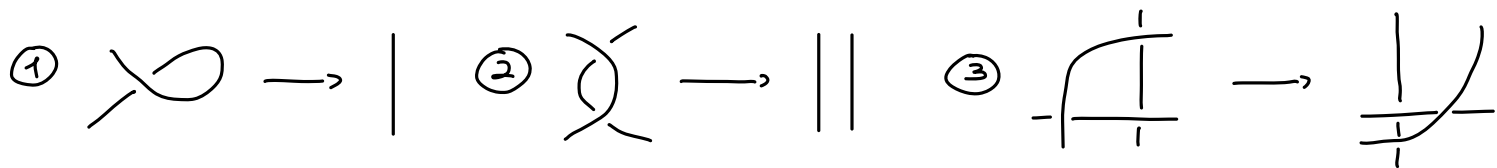
- $h_0(K_1) = K_1$

- $h_1(K_1) = K_2$

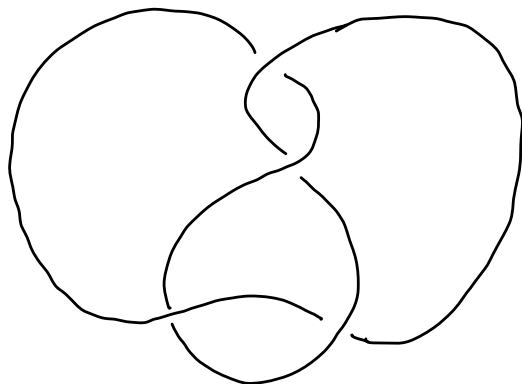
Un nodo  $K \subset S^3$  può essere rappresentato da un diagramma in  $\mathbb{R}^2$  ottenuto [69]

proiettando  $K$  su un  $\mathbb{R}^2 \subset S^2 \subset S^3$ . Due diagrammi di nodi sono equivalenti se possono essere ottenuti l'uno dall'altro tramite

- isotopie del diagramma
- mosse di Reidemeister

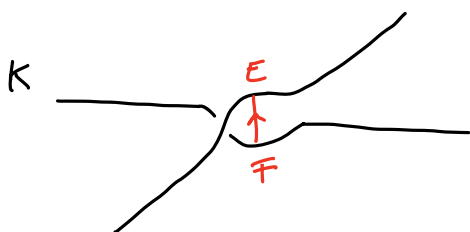


Il nodo a figura otto è il nodo  $K \subset S^3$  con il seguente diagramma



Vogliamo mostrare che  $S^3 \setminus K$  ammette una struttura iperbolica completa.

Inanzitutto vediamo che  $S^3 \setminus K$  può essere ottenuta incollando due tetraedri ideali. Possiamo supporre che il nodo giaccia, al di fuori degli incroci, interamente sul piano coordinato  $xy$  in  $\mathbb{R}^3$  e in corrispondenza degli incroci vada un po' sopra e un po' sotto tale piano. Lontano dagli incroci la parte interna dei due tetraedri coincide esattamente con la parte sopra e sotto il piano  $xy$ . Dobbiamo capire come sono fatti i tetraedri vicino agli incroci:

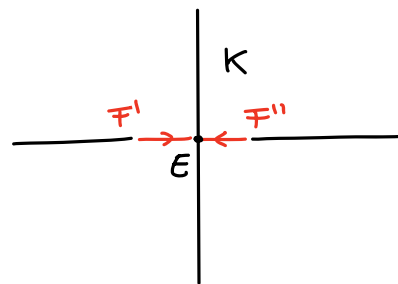


il segmento  $EF$  collega un punto

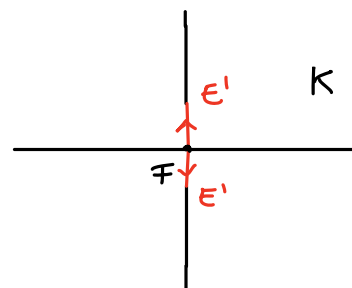
$E$  sopra il piano  $xy$  a un punto

$F$  sotto il piano  $xy$

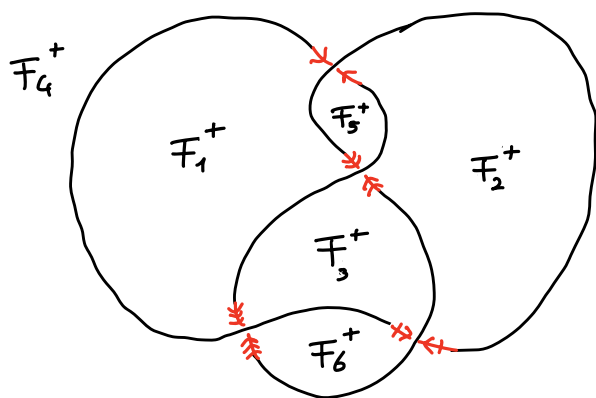
Tagliamo lungo  $F$  in modo da ottenere due segmenti  $EF'$  e  $EF''$ . Il tetraedro superiore vicino all'incrocio è la porzione di  $\mathbb{R}^3$  sopra questo diagramma (escluso  $K$ )



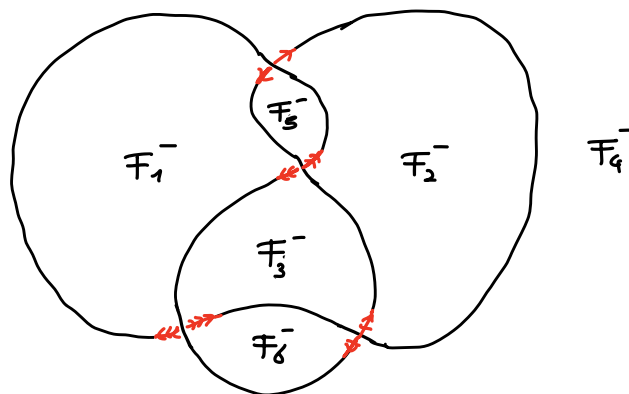
Mentre per ottenere la porzione del tetraedro inferiore vicino all'incrocio, tagliamo lungo  $E$  e prendiamo la parte sotto il diagramma (escludendo sempre  $K$ )



Ripetendo questo procedimento per ogni incrocio otteniamo

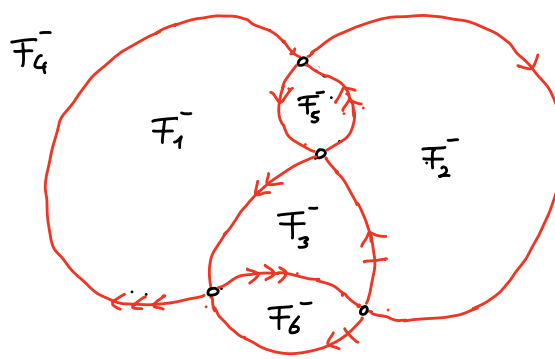
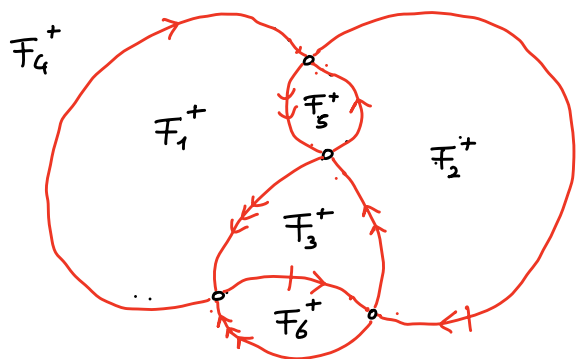


parte superiore

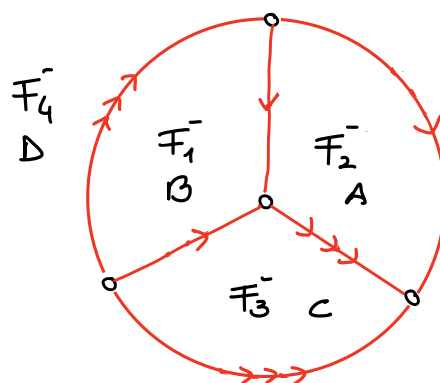
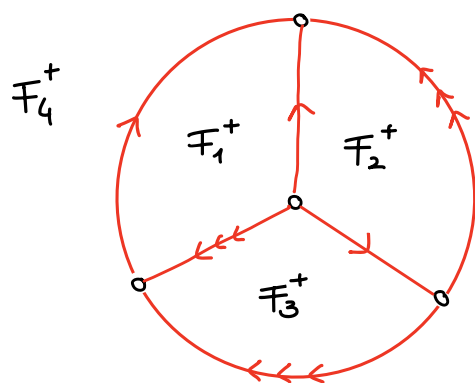


parte inferiore

Ricordiamo che la varietà a cui siamo interessati si ottiene rimuovendo da  $S^3$  (un intorno tubolare di) il modo  $K$ . Agendo con un omeomorfismo possiamo contrarre le componenti di  $K$  in modo da ottenere i diagrammi:

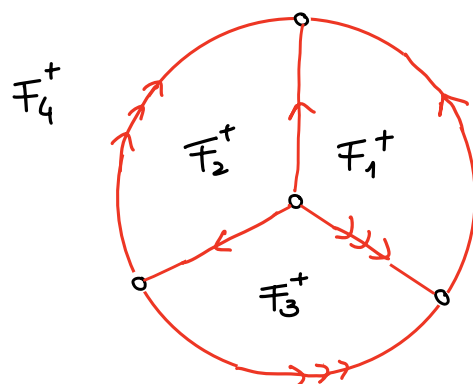


Collasiamo ora i bigoni  $F_3^+$  e  $F_3^-$  ottenendo



Ricordiamo che nel primo diagramma siamo interessati alla regione al di sopra del piano mentre nel secondo guardiamo la regione al di sotto.

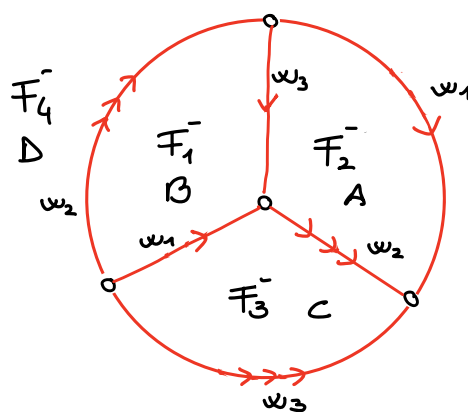
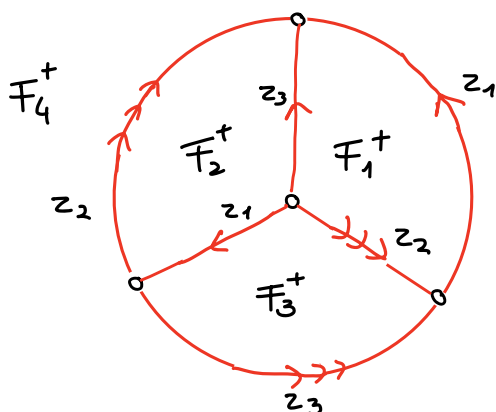
Modifichiamo, dunque, il primo diagramma in modo che il tetraedro corrisponda alla regione al di sotto di esso.



È facile convincersi che queste regioni sono omeomorfe a tetraedri ideali.

Introduciamo nei diagrammi gli edge invariants, ricordando che lati opposti

hanno invarianti coincidenti:



Le equazioni di incollamento si ottengono moltiplicando gli edge invariants di tutti i lati che vengono identificati:

$$i) z_1^2 z_3 \omega_1^2 \omega_3 = 1$$

$$ii) z_2^2 z_3 \omega_2^2 \omega_3 = 1$$

Per il Lemma 6.3.1, se  $z_1 = z$  allora  $z_2 = \frac{1}{1-z}$  e  $z_3 = \frac{z-1}{2}$ . Similmente

se  $\omega_1 = \omega$  allora  $\omega_2 = \frac{1}{1-\omega}$  e  $\omega_3 = \frac{\omega-1}{\omega}$ . Le equazioni di incollamento

diventano allora

$$i) z^2 \left( \frac{z-1}{2} \right) \omega^2 \left( \frac{\omega-1}{\omega} \right) = 1$$

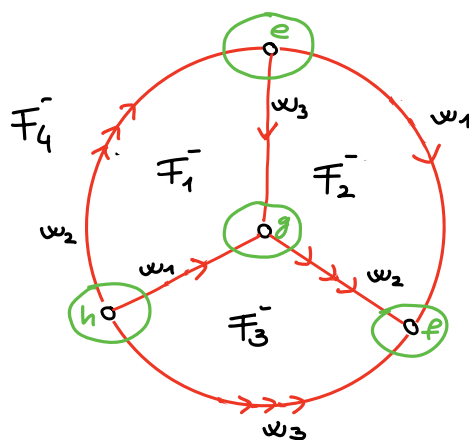
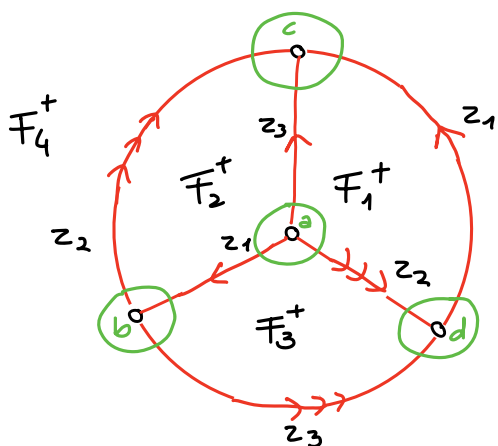
$$ii) \left( \frac{1}{1-z} \right)^2 \left( \frac{z-1}{2} \right) \left( \frac{1}{1-\omega} \right)^2 \left( \frac{\omega-1}{\omega} \right) = 1 \quad \Rightarrow \text{equivalenti}$$

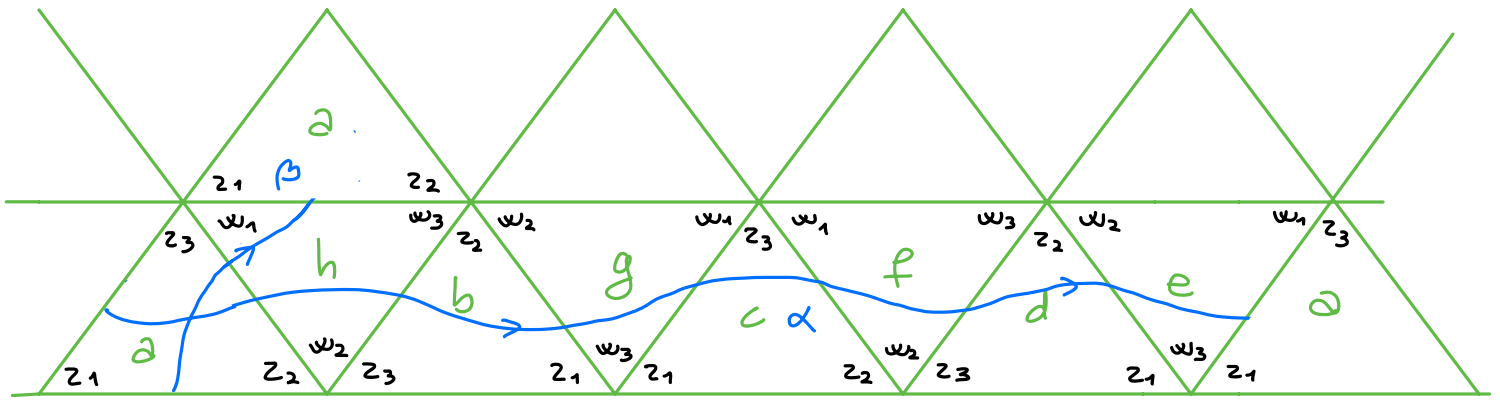
$$i) z(z-1)\omega(\omega-1) = 1 \Rightarrow z^2(\omega^2-\omega) - z(\omega^2-\omega) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{\omega^2 - \omega \pm \sqrt{(\omega^2 - \omega)^2 + 4(\omega^2 - \omega)}}{2(\omega^2 - \omega)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4/(\omega^2 - \omega)}}{2}$$

Vogliamo  $z$  e  $\omega$  con parte immaginaria positiva. Per ogni  $\omega \in \mathbb{H}^2$  esiste un unico  $z \in \mathbb{H}^2$  che risolve l'equazione fin tanto che  $1 + \frac{4}{\omega(\omega-1)} \notin \mathbb{R}^+$ , ovvero se  $\omega \neq \frac{1}{2} + iy$  con  $y > \frac{\sqrt{15}}{2}$ .

Per scrivere le equazioni di completezza, determiniamo una triangolazione del toro di bordo:





Prendiamo come generatori di  $\pi_1(T^2)$  le curve  $\alpha$  e  $\beta$  in figura. Otteniamo le equazioni di completezza

$$i) \quad 1 = H(\alpha) = z_3 w_2^{-1} z_2 w_3^{-1} z_3 w_2^{-1} z_2 w_3^{-1} = \left( \frac{z_2 z_3}{w_2 w_3} \right)^2 = \left( \frac{w}{z} \right)^2 \Rightarrow z = w$$

$$ii) \quad 1 = H(\beta) = z_2^{-1} w_1 = w(1-z) = w(1-w) \Rightarrow_{\text{Im}(w) > 0} w = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi l'unica scelta degli edge invariants che produce una struttura iperbolica completa sul complementone del nodo a figura 8 è  $z = w = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Abbiamo allora dimostrato

**Teorema 6.4.1** La 3-varietà  $S^3_K$  ammette una struttura iperbolica completa.



## 7. Gruppi Fuchsiani

### 7.1. Proprietà dei sottogruppi discreti di $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$

**Lemma 7.1.1** Sia  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  un sottogruppo discreto e abeliano. Se  $G$  contiene un'isometria parabolica, allora  $G$  è ciclico

Dim: Sia  $A \in G$  parabolico. A meno di coniugio possiamo supporre che  $A$  fissi  $\infty \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ . Tutti gli elementi di  $G$  devono essere parabolici e fissare  $\infty$ , per cui sono tutti della forma  $S_a(z) = z + a$  per qualche  $a \in \mathbb{R}$ . Sia  $\bar{a} = \inf \{ a > 0 \mid S_a \in G \}$ : siccome  $G$  è discreto  $\bar{a} > 0$  ed è in realtà un minimo. Allora  $G = \langle T_{\bar{a}} \rangle$ .

Data un'isometria Coxodromica  $S$ , indichiamo con  $Ax(S)$  la geodetica completa invariante per  $S$ .

**Lemma 7.1.2** Sia  $T$  un'isometria Coxodromica e  $S$  un'isometria tale che  $S(Ax(T)) = Ax(T)$  allora, detti  $v_1, v_2$  i punti estremi di  $Ax(T)$ ,

a) se  $S(v_i) = v_i$ ,  $S$  è Coxodromica con lo stesso asse,  $ST = TS$  e  $\langle S, T \rangle$  è ciclico

b) se  $S(v_i) = v_j$  allora  $S$  è ellittica di ordine 2 con punto fisso su  $Ax(T)$  e  $STS^{-1} = T^{-1}$  per cui  $\langle S, T \rangle$  è un gruppo diedrale.

Dim: a) l'argomento è analogo a quello del Lemma 7.1.1.

b) a meno di coniugio possiamo supporre che  $T(z) = \lambda z$ , per cui  $v_1 = 0$  e  $v_2 = \infty$ . Le uniche trasformazioni di Möbius che invertono 0 e  $\infty$  sono della forma  $S(z) = -b^2/z$  che [75]

sono ellittiche di ordine 2 e punto fisso  $ib \in Ax(T)$ .

Si verifica direttamente che  $STS^{-1} = T^{-1}$ .

**Proposizione 7.1.3** Ogni sottogruppo discreto di  $PSL(2, \mathbb{R})$  abeliano è ciclico.

Dim: I lemmi precedenti mostrano che se un sottogruppo abeliano discreto contiene un elemento parabolico o Coxodromico, allora è ciclico. Se contiene un elemento ellittico è facile vedere che tutti gli altri elementi devono essere ellittici con lo stesso punto fisso. In questo caso, quindi, abbiamo sottogruppo di rotazioni che è ciclico oppure non discreto.

**Lemma 7.1.4** Sia  $G < PSL(2, \mathbb{R})$  un sottogruppo discreto. Sia  $T \in G$  Coxodromica e  $S \in G$  parabolica. Allora  $S$  e  $T$  non hanno punti fissi in comune.

Dim: A meno di coniugio possiamo supporre che il punto fisso comune sia  $\infty$ , per cui  $T(z) = \lambda z$  con  $\lambda > 1$  e  $S(z) = z + c$ .

Osserviamo che  $T^{-n} S T^n(z) = \lambda^{-n}(\lambda^n z + c) = z + \lambda^{-n} c \rightarrow z \quad n \rightarrow +\infty$  quindi  $G$  non è discreto.

**Oss** La stessa dimostrazione si applica anche al caso di  $T$  ed  $S$  entrambe Coxodromiche con un solo punto fisso in comune. Quindi se  $G$  è discreto e contiene due elementi Coxodromici, i loro assi coincidono

o non hanno punti all'infinito in comune.

**Def** Un gruppo Fuchsiano è un sottogruppo discreto di  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Un gruppo Fuchsiano si dice elementare se è ciclico o è il gruppo diedrale del Lemma 7.1.2.

**Corollario 7.1.5** Sia  $G$  un sottogruppo Fuchsiano. Se  $S \in G$  è Coxodromico ed esiste  $T \in G$  tale che  $T(Ax(S)) \neq Ax(S)$ , allora  $G$  contiene infinite isometrie Coxodromiche con assi distinti.

Dim:  $T(Ax(S)) = Ax(TST^{-1})$  per cui entrambi i punti estremi di  $T(Ax(S))$  sono distinti dai punti estremi di  $Ax(S)$ , per il Lemma 7.1.4 e osservazione successiva.

Mostriamo che l'insieme  $\{S^n T(Ax(S))\}_{n \geq 0}$  fornisce una famiglia infinita di assi di elementi di  $G$  distinti. Infatti, se  $S^n T(Ax(S)) = S^m T(Ax(S))$  per qualche  $n, m \in \mathbb{N}$  allora esisterebbe un minimo  $r > 0$  tale che  $S^r T(Ax(S)) = T(Ax(S))$ . Allora  $S^{2r}$  fissa necessariamente i punti estremi di  $T(Ax(S))$  e quindi  $S^{2r}$  fissa sia  $Ax(S)$  che  $T(Ax(S))$  che hanno estremi distinti. Questo è assurdo.

**Lemma 7.1.6** Sia  $G$  Fuchsiano e  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ . Allora se  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$  vale  $c = 0$  oppure  $|c| \geq 1$ . In particolare  $|\mathrm{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2| \geq 1$ .

Dim: Consideriamo la successione definita da  $B_0 = B$  e  $B_{n+1} = B_n A B_n^{-1}$ .

Un calcolo diretto mostra che

$$B_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow B_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{pmatrix}$$

Quindi  $c_{n+1} = -c_n^2 = (-1)^n c^{2^{n+1}}$  e se  $|c| < 1$  abbiamo  $c_n \rightarrow 0$ .

Inoltre per induzione si dimostra che  $|a_n| \leq n + |a_0|$  per cui  $a_n c_n \rightarrow 0$

e  $a_n \rightarrow 1$ . Quindi  $B_n \rightarrow A$  contraddicendo il fatto che  $G$  è discreto.

Quindi  $|c| \geq 1$ . Si calcola direttamente che  $\text{tr}(ABA^{-1}B^{-1}) - 2 = c^2$ .

## 7.2. Domini fondamentali

**Def** Sia  $G$  un gruppo Fuchsiano. Un sottoinsieme  $R \subset \mathbb{H}^2$  è un dominio fondamentale per l'azione di  $G$  in  $\mathbb{H}^2$  se

$$i) \quad g(R) \cap R = \emptyset \quad \forall g \in G \setminus \{\text{id}\}$$

$$ii) \quad \forall z \in \mathbb{H}^2 \quad \exists g \in G \text{ tale che } g(z) \in \overline{R}, \text{ ovvero } \mathbb{H}^2 = \bigcup_{g \in G} \overline{g(R)}$$

Richiediamo inoltre le seguenti proprietà

$$iii) \quad R \text{ è la parte interna di un poligono iperbolico convesso}$$

$$iv) \quad \bigcup_{g \in G} g(R) \text{ è localmente finita, ovvero } \forall K \subset \mathbb{H}^2 \text{ compatto l'insieme } \{g \in G \mid g(R) \cap K \neq \emptyset\} \text{ è finito.}$$

**Teorema 7.2.1** Sia  $G$  un gruppo Fuchsiano. Allora esiste un dominio fondamentale  $R$  per  $G$  che soddisfa le proprietà i) - iv).

Dimostriamo il teorema costruendo esplicitamente un dominio fondamentale che soddisfa le proprietà i) - iv), detto dominio di Dirichlet.

**Domino di Dirichlet** Sia  $z_0 \in \mathbb{H}^2$ . Per ogni  $g \neq \text{id} \in G$  consideriamo la

perpendicolare al segmento geodetico che connette  $z_0$  e  $g(z_0)$  passante per il punto medio. Tale geodetica suddivide  $\mathbb{H}^2$  in due semipiani. Indichiamo con  $H_g(z_0)$  il semipiano che contiene  $z_0$ . Quindi:

$$H_g(z_0) = \{ z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, z_0) < d(z, g(z_0)) \} \quad d = d_{\mathbb{H}^2}$$

**Lemma 7.2.2.** Sia  $G < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  un gruppo Fuchsiano. I punti  $z \in \mathbb{H}^2$  con stabilizzatore banale formano un aperto denso.

Dim: Mostriamo che  $\bigcup_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$  è un insieme localmente finito. Se non lo fosse, allora esiste un compatto  $K \subset \mathbb{H}^2$  e una successione  $g_n \in G$  tali che  $\mathrm{Fix}(g_n) \cap K \neq \emptyset$ . Ma allora  $G$  non agisce in modo propriamente discontinuo, contraddicendo il fatto che  $G$  è discreto. Quindi  $\bigcup_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$  è localmente finito e il complementare è aperto e denso.

Prendiamo  $z_0 \in \mathbb{H}^2$  con stabilizzatore banale. Il dominio di Dirichlet di centro  $z_0$  è

$$R_{z_0} = \bigcap_{g \neq \mathrm{id}} H_g(z_0) = \{ z \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, z_0) < d(z, g(z_0)) \quad \forall g \neq \mathrm{id} \}$$

Mostriamo che  $R$  soddisfa le proprietà i)-iv)

- $h(R_{z_0}) = R_{h(z_0)}$

Dim:

$$\begin{aligned} h(R_{z_0}) &= \{ h(z) \in \mathbb{H}^2 \mid d(z, z_0) < d(z, g(z_0)) \quad \forall g \neq \mathrm{id} \} \\ &= \{ h(z) \in \mathbb{H}^2 \mid d(h(z), h(z_0)) < d(h(z), h(g(z_0))) \quad \forall g \neq \mathrm{id} \} \\ &= \{ w \in \mathbb{H}^2 \mid d(w, h(z_0)) < d(w, h(g(h^{-1}(h(z_0)))) \quad \forall g \neq \mathrm{id} \} \\ &= \{ w \in \mathbb{H}^2 \mid d(w, h(z_0)) < d(w, K(h(z_0))) \quad \forall K \neq \mathrm{id} \} = R_{h(z_0)} \end{aligned}$$

• Proprietà i)

Dim: Se  $z \in R_{z_0} \cap R_{g(z_0)}$  allora  $d(z, z_0) < d(z, g(z_0))$  e  $d(z, g(z_0)) < d(z, \tilde{g}'(g(z_0))) = d(z, z_0)$ . Assurdo.

• Proprietà ii)

Dim: L'insieme  $\{g(z_0) \mid g \in G\} \cap \overline{B(z, 1)}$  è finito perché  $G$  agisce in modo propriamente discontinuo. Esiste allora un elemento  $g \in G$  tale che  $d(z, g(z_0)) = \inf_{h \in G} d(z, h(z_0))$ . Quindi  $d(\tilde{g}'(z), z_0) < d(\tilde{g}'(z), \tilde{g}'(h(z_0))) \forall h \neq g$ . Vogliamo mostrare che  $\tilde{g}'(z) \in \bar{R}$ . Questo segue se mostriamo che se  $d(w, z_0) \leq d(w, k(z_0)) \forall k \neq \text{id}$  allora il segmento geodetico  $\gamma$  che connette  $z_0$  a  $w$  è contenuto in  $\bar{R}$ . Sia  $a \in \gamma \setminus \{w\}$ . Allora  $d(z_0, a) + d(a, w) = d(z_0, w) \leq d(w, k(z_0)) \forall k \neq \text{id}$ . Quindi  $d(z_0, a) \leq d(w, k(z_0)) - d(a, w) \leq d(a, k(z_0)) \forall k \neq \text{id}$ . L'ultima disuguaglianza è un'uguaglianza soltanto se  $a$  appartiene al segmento geodetico tra  $w$  e  $k(z_0)$ . Tale segmento interseca  $\gamma$  solo in  $w$ , quindi  $\forall a \in \gamma \setminus \{w\}$  abbiamo  $d(z_0, a) < d(a, k(z_0)) \forall k \neq \text{id}$ . Quindi  $\gamma \setminus \{w\} \subseteq R$  e  $\gamma \subseteq \bar{R}$ .

• Proprietà iv)

Dim: Sia  $K = \overline{B(z_0, R)}$ . Se  $g(R_{z_0}) \cap K \neq \emptyset$  allora esiste  $z \in g(R_{z_0}) = R_{g(z_0)}$  tale che  $d(z_0, z) \leq R$ . Allora

$$d(g(z_0), z_0) \leq d(z, g(z_0)) + d(z, z_0) \leq d(z, z_0) + d(z, z_0) \leq 2R$$

perché  $z \in R_{g(z_0)}$ .

Siccome  $\{g \in G \mid g(z_0) \in \overline{B(z_0, 2R)}\}$  è finito, il risultato segue.

• Proprietà iii)

Dim: Mostriamo che se  $K = \overline{B(z_0, R)}$  ci sono solo un numero finito di perpendicolari nella costruzione del dominio di Dirichlet che intersecano  $K$ . Sia  $\gamma_h$  la perpendicolare passante per il punto medio tra  $z_0$  e  $h(z_0)$ . Se  $w \in \gamma_h \cap K$  allora

$$d(z_0, h(z_0)) \leq d(z_0, w) + d(w, h(z_0)) = 2d(z_0, w) \leq 2R$$

e solo un numero finito di  $h \in G$  soddisfano la disuguaglianza.

Sia  $B$  una palla aperta tale che  $R \cap B \neq \emptyset$ . Allora  $\partial R \cap B$  contiene un numero finito di segmenti geodetici.

Siccome  $R$  è chiaramente un poligono convesso rimane solo da mostrare che  $R$  è aperto, ovvero  $R \cap B$  è aperto per ogni palla aperta  $B$ . Se  $R \cap \bar{B} \neq \emptyset$  allora  $H_g \cap \bar{B} = H_g$  per ogni  $g \in G$  tranne al più un numero finito di  $g$  perché  $\bar{B} \subset H_g$  tranne per al più un numero finito di  $g$ . Quindi

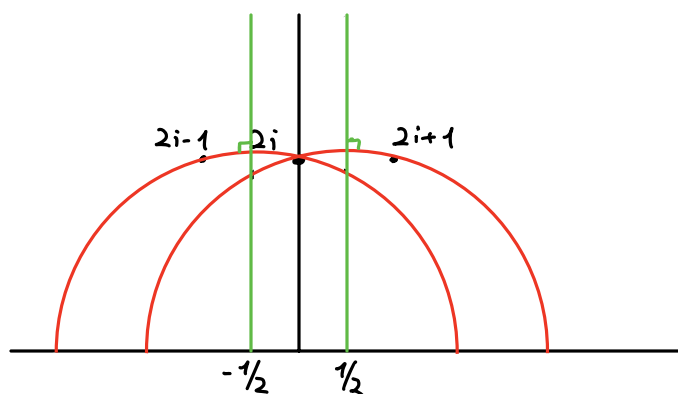
$$R \cap \bar{B} = \left( \bigcap_{g \in G} H_g \right) \cap \bar{B} = (H_{g_1} \cap \dots \cap H_{g_n}) \cap \bar{B}$$

quindi  $R$  è aperto in  $\bar{B}$  e anche in  $B$ .

Esempio Mostriamo che il dominio di Dirichlet di  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  centrato in  $2i \in \mathbb{H}^2$  è  $R = R(2i) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| > 1, -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$ .

Siano  $\gamma_1(z) = z+1$  e  $\gamma_2(z) = -\frac{1}{z}$ . Si vede facilmente che  $H_{\gamma_1}(\gamma_1) =$

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\} \quad \text{e} \quad H_{2i}(\gamma_1^{-1}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Re}(z) > -\frac{1}{2}\}$$



Il segmento geodetico che connette  $2i$  e  $\gamma_2(2i) = \frac{i}{2}$  è l'asse immaginario per cui la geodetica perpendicolare passante per il punto medio è la semicirconferenza unitaria centrata nell'origine. Quindi  $H_{2i}(\gamma_2) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| > 1\}$ .

Sia  $F = H_{2i}(\gamma_1) \cap H_{2i}(\gamma_1^{-1}) \cap H_{2i}(\gamma_2)$ . Allora  $R = \bigcap_{\gamma \neq \text{id}} H_{2i}(\gamma) \subseteq F$ . Mostriamo che

$R = F$ . Supponiamo che  $R \subsetneq F$ . Siccome  $R$  è un dominio fondamentale, esiste

$z_0 \in F \setminus R$  e  $\gamma \neq \text{id} \in \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$  tale che  $\gamma(z_0) \in R$ . Scriviamo  $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  e  $ad - bc = 1$ . Allora, poiché  $|z_0| > 1$  e  $\operatorname{Re}(z_0) > -\frac{1}{2}$ ,

$$|cz_0 + d|^2 = c^2|z_0|^2 + d^2 + 2\operatorname{Re}(z_0)cd > c^2 + d^2 - |cd| = (|c| - |d|)^2 + |cd| > 1$$

Quindi  $\operatorname{Im}(\gamma(z_0)) = \frac{\operatorname{Im}(z_0)}{|cz_0 + d|^2} < \operatorname{Im}(z_0)$ . D'altra parte le disuguaglianze valgono

anche per  $\gamma(z_0) \in R$  al posto di  $z_0$  e  $\gamma^{-1}$  al posto di  $\gamma$ . Otteniamo allora

$\operatorname{Im}(z_0) < \operatorname{Im}(\gamma(z_0)) < \operatorname{Im}(z_0)$  che è assurdo.

### 7.3. Costruzione di gruppi Fuchsiani

Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano e sia  $R$  un dominio di Dirichlet per  $\Gamma$ . Supponiamo che  $R$  abbia un numero finito di lati. Orientiamo i lati di  $R$ .

Siano  $s_1$  e  $s_2$  lati di  $R$ . Diciamo che  $s_1$  e  $s_2$  sono identificati se

$\exists \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  tale che  $\gamma(s_1) = s_2$  e diciamo che  $\gamma$  è un'identi- 82



ficazione tra i lati di  $R$ .

**Teorema 7.3.1** Sia  $\Gamma$  un gruppo Fuchsiano ed  $R$  un dominio di Dirichlet di  $\Gamma$ . Sia  $\{\gamma_i\}$  l'insieme delle identificazioni tra i lati di  $R$ . Allora  $\Gamma = \langle \gamma_i \rangle$ .

Dim: Sia  $\Lambda = \langle \gamma_i \rangle$ . Supponiamo che  $\tau_1 \in \Lambda$  e  $\tau_2(\bar{R})$  è adiacente a  $\tau_1(\bar{R})$ , ovvero hanno un lato in comune. Allora  $\tau_1^{-1} \circ \tau_2(\bar{R})$  è adiacente ad  $\bar{R}$  per cui esiste  $\gamma_k \in \Lambda$  tale che  $\tau_1^{-1} \circ \tau_2 = \gamma_k \Rightarrow \tau_2 = \tau_1 \circ \gamma_k$  è un elemento di  $\Lambda$ . Supponiamo ora che  $\tau_3 \in \Gamma$  e  $\tau_3(\bar{R})$  interseca  $\tau_1(\bar{R})$  in un vertice. Allora  $\tau_1^{-1} \circ \tau_3(\bar{R})$  interseca  $R$  in un vertice  $u = \tau_1^{-1}(v)$ . Siccome  $\bar{R}$  è localmente finito, ci sono solo un numero finito di copie di  $\bar{R}$  con vertice  $u$ . Quindi  $\bar{R}$  può essere collegato a  $\tau_1^{-1} \circ \tau_3(\bar{R})$  da un numero finito di copie di  $\bar{R}$  che condividono un lato. Per lo stesso argomento precedente,  $\tau_1^{-1} \circ \tau_3 \in \Lambda$  e quindi  $\tau_3 \in \Lambda$ . Sia  $X = \bigcup_{\tau \in \Lambda} \tau(\bar{R})$  e  $Y = \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda} \gamma(\bar{R})$ . Abbiamo mostrato che  $X \cap Y = \emptyset$  (chiaramente  $X \cup Y = \mathbb{H}^2$ ). Siccome  $\bar{R}$  è localmente finito,  $X$  e  $Y$  sono chiusi. Siccome  $\mathbb{H}^2$  è connesso,  $X = \mathbb{H}^2$  e  $Y = \emptyset$  per cui  $\Lambda = \Gamma$ .

Vogliamo invertire l'enunciato del Teorema 7.3.1: se partiamo da un poligono geodetico di  $\mathbb{H}^2$  localmente finito e consideriamo il gruppo generato dagli accoppiamenti dei suoi lati, sotto quali condizioni tale gruppo è Fuchsiano?

Sia  $R$  un poligono geodetico convesso localmente finito di  $\mathbb{H}^2$ . Siamo sì

i lati di  $R$ . Supponiamo che tutti i lati di  $R$  vengano identificati. Per ogni vertice  $v \in \bar{R}$  ci sono due lati  $s$  e  $*s$  con vertice  $v$ . Indichiamo con  $(v, s)$  una coppia costituita da un vertice  $v \in \bar{R}$  e un lato  $s \subseteq \bar{R}$  con  $v \in s$ . Sia  $*(v, s) = (v, *s)$ , ovvero la coppia costituita dallo stesso vertice e dall'altro lato adiacente a  $v$ . Implementiamo la seguente procedura:

- i) Partiamo da una coppia  $(v_0, s_0)$ . Sia  $\gamma_1$  l'accoppiamento che coinvolge  $s_0$  e siamo  $\gamma_1(v_0) = v_1$  e  $\gamma_1(s_0) = s_1$ .
- ii) Consideriamo la coppia  $*(v_1, s_1)$ . Sia  $\gamma_2$  l'accoppiamento tra i lati che coinvolge  $s_1$  e siamo  $\gamma_2(v_1) = v_2$  e  $\gamma_2(*s_1) = s_2$ .
- iii) Consideriamo la coppia  $*(v_2, s_2)$  e ripetiamo la procedura finché  $*(v_n, s_n) = (v_0, s_0)$ .

**Def** La successione di vertici  $v_0 \xrightarrow{\gamma_1} v_1 \xrightarrow{\gamma_2} \dots \xrightarrow{\gamma_n} v_n = v_0$  ottenuta con la costruzione precedente e  $v_0 \notin \partial_\infty \mathbb{H}^2$  è detta ciclo ellittico. L'isometria corrispondente  $\gamma_n \circ \gamma_{n-1} \circ \dots \circ \gamma_1$  è detta trasformazione associata al ciclo ellittico. Diciamo che la trasformazione è un ciclo accidentale se  $\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1 = \text{id}$ .

**Def** La successione di vertici  $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n = v_0$  ottenuta con la procedura precedente e  $v_0 \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$  è detta ciclo parabolico. L'isometria corrispondente  $\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1$  è detta trasformazione associata al ciclo parabolico.

**Teorema 7.3.2** Sia  $R$  un poligono geodetico convesso con un numero finito di lati. Sia  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$  una collezione di identificazioni tra i lati di  $R$ .

Siano  $E_1, \dots, E_r$  i cicli ellittici e  $P_1, \dots, P_s$  i cicli parabolici. Supponiamo che

i) per ogni ciclo ellittico  $\xi_j$  esiste  $m_j \in \mathbb{Z}$  tale che  $\theta_{j,1} + \dots + \theta_{j,k} = \frac{2\pi}{m_j}$

dove  $\theta_{j,i}$  sono gli angoli interni ad  $R$  nei vertici in  $\xi_j$ ;

ii) ogni trasformazione associata ai cicli parabolici è un'isometria parabolica

Allora  $\Gamma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$  è un gruppo Fuchsiano isomorfo a  $G = \langle g_1, \dots, g_n \mid$

$T_j^{m_j}(g_i) = \text{id} \rangle$ , dove  $T_j$  sono le relazioni dei cicli ellittici, ed  $R$  è un dominio di Dirichlet di  $\Gamma$ .

Dim (idea): Sia  $X = \bigsqcup_{g \in G} (\bar{R}, g) / \sim$  lo spazio topologico ottenuto prendendo una

copia di  $\bar{R}$  per ogni  $g \in G$  e quozientando per la relazione

$(\bar{R}, g) \ni x \sim y \in (\bar{R}, h)$  se e solo se esiste un generatore  $g_r \in G$

ta~~le~~ che  $h = gg_r$  e  $y = g_r^{-1}(x)$ .  $G$  agisce su  $X$  ponendo  $g \cdot (x, h) = (x, gh)$ .

Sia  $j: G \rightarrow \Gamma$  tale che  $j(g_i) = \gamma_i$ . Lo spazio  $X$  ammette una

naturale metrica iperbolica indotta da quella su  $\bar{R}$ . Definiamo la mappa

$\psi: X \rightarrow \mathbb{H}^2$  come  $\psi(x) = j(g)(x)$  se  $x \in (\bar{R}, g)$ . Osserviamo che  $\psi$

è equivariante nel senso che  $\psi(g \cdot (x, h)) = j(g)\psi(x, h)$ . Si può verifi-

care che la condizione sui cicli parabolici implica che la metrica

su  $X$  è completa. Inoltre  $X$  è semplicemente connessa e  $\psi$  è un

riinvestimento surgettivo. Quindi  $\psi$  è un omeomorfismo.

Siccome l'azione di  $G$  su  $X$  è propriamente discontinua, per concludere

che  $\Gamma$  è Fuchsiano basta mostrare che  $j: G \rightarrow \Gamma$  è un isomorfismo.

Se esistesse  $h \in G$  tale che  $j(h) = \text{id}$  allora l'immagine tramite  $\psi$

di un cammino  $\alpha$  che collega  $(x_0, \text{id})$  e  $(x_0, h)$  è un cammino chiuso

in  $\mathbb{H}^2$  e quindi omotopicamente banale. Sollevando l'omotopia a [85]

X otteniamo una famiglia di cammini  $\alpha_s$  con  $\alpha_1 = \alpha$  e  $\alpha_0$  banale.

Associamo al cammino  $\alpha_s$  una parola  $e(\alpha_s)$  nei generatori  $g_1, \dots, g_r$  nel modo seguente: se  $\alpha_s$  attraversa due regioni adiacenti  $(\bar{R}, g)$  e  $(\bar{R}, g')$  allora  $g'g^{-1} = g_j$  ed associamo ad  $\alpha_s$  il prodotto dei generatori così ottenuti ogni volta che  $\alpha_s$  attraversa due regioni. Siccome  $\alpha_0$  è il cammino banale  $e(\alpha_0) = \text{id} \in G$ . Nel corso dell'omotopia,  $e(\alpha_s)$  cambia solo se  $\alpha_s$  attraversa un vertice per una delle relazioni  $T_j$ . Per induzione  $e(\alpha)$  è il prodotto di relazioni  $T_j$ . Per costruzione  $h = e(\alpha)$  e quindi  $h$  è banale in  $G$ .

Se  $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  è Fuchsiano, poiché la sua azione potrebbe non essere libera, il quoziente  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  non è propriamente una superficie iperbolica perché ci sono punti che hanno intorni isometrici a una palla di  $\mathbb{H}^2$  per l'azione di una rotazione di angolo  $\frac{2\pi}{m}$ , con  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Diciamo che  $\mathbb{H}^2/\Gamma$  è un orbifold.

**Def** La caratteristica di Eulero di un orbifold  $O$  omeomorfo a una superficie  $S_{g,n}$  e con singolarità coniche di angolo  $\frac{2\pi}{m_j}$  per  $j = 1, \dots, K$  è

$$\chi(O) = 2 - 2g - n - \sum_{j=1}^K \left(1 - \frac{1}{m_j}\right)$$

**Proposizione 7.3.3** Sia  $O$  un orbifold iperbolico come sopra, allora

$$\text{Area}(O) = 2\pi |\chi(O)|$$

**Dim:** Sia  $S \rightarrow O$  un rivestimento ramificato di grado  $d$  tale che  $S$  è una superficie iperbolica. Tale rivestimento esiste per la teoria delle

superfici di Riemann prendendo  $d = \text{mcm}(m_j)_{j=1}^K$ ,  $r = \sum_{j=1}^K \frac{d}{m_j}$  e  $S$  tale che  $\chi(S) - r = d(\chi(S_{g,n}) - K)$  (formula di Hurwitz).

Allora  $2\pi|\chi(S)| = \text{Area}(S) = d \text{Area}(O)$ .

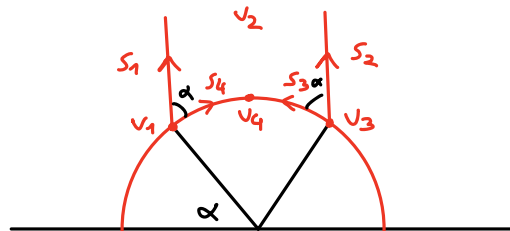
Basta quindi mostrare che  $\chi(S) = d|\chi(O)|$ . Prendiamo una triangolazione di  $O$  in cui i punti singolari sono vertici. Allora

$$\chi(O) = v - e + f - \sum_j \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) = f - e + \sum_j \frac{1}{m_j}$$

$$\chi(S) = v' - de + df$$

e la tesi segue perché  $d \sum_j \frac{1}{m_j} = v'$

**Esempio** Studiamo il quoziente  $X = \mathbb{H}^2 / \Gamma$  dove  $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ . Abbiamo già trovato un dominio fondamentale di  $\Gamma$



$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & v_4 &= i \\ v_3 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & v_2 &= \infty \\ \alpha &= \pi/3 \end{aligned}$$

Per evitare che un lato sia identificato con se stesso introduciamo un nuovo vertice  $v_4 = i$  nel punto medio tra  $v_1$  e  $v_3$ . Le identificazioni dei lati sono  $\gamma_1(z) = z + 1$  e  $\gamma_2(z) = -\frac{1}{z}$ . Calcoliamo i cicli ellittici:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1: (v_1, s_1) &\xrightarrow{\gamma_1} (v_3, s_2) \xrightarrow{s} (v_3, s_3) \xrightarrow{\gamma_2^{-1}} (v_1, s_4) \xrightarrow{s} (v_1, s_1) \\ \mathcal{E}_2: (v_4, s_3) &\xrightarrow{\gamma_2^{-1}} (v_4, s_4) \xrightarrow{s} (v_4, s_3) \end{aligned}$$

Le trasformazioni associate sono  $T_1 = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_2$  e  $T_2 = \gamma_2^{-1}$ . Inoltre  $\theta_{\mathcal{E}_1} = \frac{2\pi}{3}$  e  $\theta_{\mathcal{E}_2} = \pi$ .

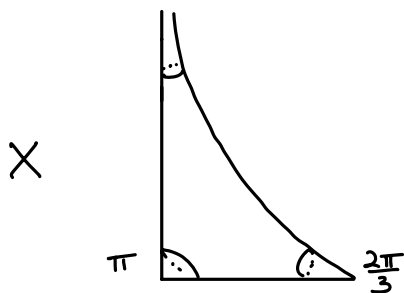
$\mathcal{C}'$  è solo un ciclo parabolico  $\mathcal{P}: (v_2, s_1) \xrightarrow{\gamma_1} (v_2, s_2) \xrightarrow{s} (v_2, s_1)$  con trasformazione

me associata  $\gamma_1$ , che è parabolica. Le ipotesi del Teorema 7.3.2 sono verificate,

quindi  $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid \gamma_2^{-2} = (\gamma_1 \gamma_2^{-1})^3 = \text{id} \rangle$  è una presentazione di  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ .

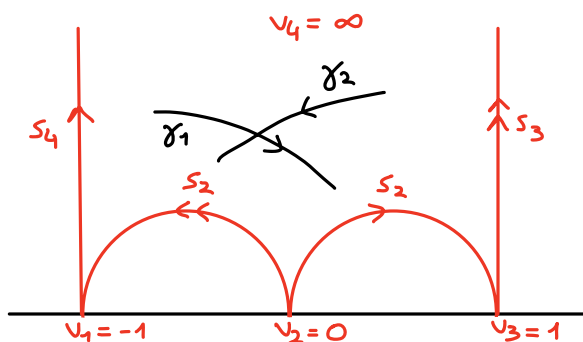
Il quoziente è un orbifold iperbolico omeomorfo a  $S^2 \setminus \{p\}$  ed area  $\text{Area}(X) =$

$$2\pi |\chi(X)| = 2\pi \left| 2 - 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \right| = 2\pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3}$$



**Esempio** Consideriamo il seguente quadrilatero con identificazioni dei lati date

da  $\gamma_1(z) = \frac{z+1}{z+2}$  e  $\gamma_2(z) = \frac{z-1}{z-2}$



$C'$  è solo un ciclo parabolico

$$\begin{aligned} P: (v_1, s_1) &\xrightarrow{\gamma_2^{-1}} (v_4, s_3) \xrightarrow{*} (v_4, s_4) \xrightarrow{\gamma_1} (v_3, s_2) \xrightarrow{*} (v_3, s_3) \xrightarrow{\gamma_2} \\ &(v_2, s_1) \xrightarrow{*} (v_2, s_2) \xrightarrow{\gamma_1^{-1}} (v_1, s_4) \xrightarrow{*} (v_1, s_1) \end{aligned}$$

La trasformazione associata è  $\gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1}$  che è parabolica dato che

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ha traccia } -2.$$

Le ipotesi del Teorema 7.3.2 sono verificate, dunque  $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$  è Fuchsiano

e  $S = \mathbb{H}^2 / \Gamma$  è una superficie iperbolica con  $\chi(S) = 0 - 2 + 1 = -1$ .  $S$  è un

toro con una puntura.

## 8. Decomposizione thin-thick

### 8.1. Raggio di iniettività

**Def** Sia  $M$  una  $n$ -varietà iperbolica e sia  $p \in M$ . Il raggio di iniettività  $\text{inj}_p(M)$  di  $M$  in  $p$  è l'estremo superiore degli  $r > 0$  tali che  $B_M(p, r)$  è isometrica a una palla di  $\mathbb{H}^n$  di raggio  $r$ . Il raggio di iniettività di  $M$  è  $\text{inj}(M) = \inf_{p \in M} \text{inj}_p(M)$

**Proposizione 8.1.1** Sia  $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$  una varietà iperbolica completa, allora

$$\text{inj}(M) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} d(\gamma)$$

dove  $d(\gamma)$  indica la lunghezza di traslazione di  $\gamma$ .

**Dim:** Sia  $\pi: \mathbb{H}^n \rightarrow M$  la proiezione al quoziente. Dato  $p \in M$ , è aperto  $B_M(p, r) = \{q \in M \mid d_M(p, q) < r\}$  è una palla se e solo se  $\pi^{-1}(B_M(p, r))$  è l'unione disgiunta di palle di raggio  $r$ . Questo è possibile se e solo se ogni coppia di punti di  $\pi^{-1}(p)$  è a distanza almeno  $2r$ . D'altra parte i punti di  $\pi^{-1}(p)$  si ottengono fissando un sollevamento  $\bar{p} \in \mathbb{H}^n$  e agendo con  $\gamma \in \Gamma$ . Quindi

$$\text{inj}_p(M) = \frac{1}{2} \inf \{ d_{\mathbb{H}^n}(\bar{p}, \gamma(\bar{p})) \mid \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}, \bar{p} \in \pi^{-1}(p) \}$$

e

$$\text{inj}(M) = \inf_{p \in M} \text{inj}_p(M) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} d(\gamma)$$

per definizione di lunghezza di traslazione

**Corollario 8.1.2.** Se  $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$  è compatta allora  $\Gamma$  ha solo elementi Coxodromici.

**Dim:** Se  $M$  è compatta  $\text{inj}(M) > 0$

## 8.2 Lemma di Margulis

**Lemma 8.2.1** Sia  $G < GL(n, \mathbb{C})$  un sottogruppo di Lie. Esiste un intorno  $U$  di  $Id \in GL(n, \mathbb{C})$  tale che ogni sottogruppo discreto di  $\Gamma < G$  generato da elementi in  $U$  è nilpotente.  
 Se  $\Gamma_0 = \Gamma$  e  $\Gamma_k = [\Gamma, \Gamma_{k-1}]$ ,  $\exists k > 0$  t.c.  $\Gamma_k = \{id\}$ .

Dim: Considera la mappa  $[\cdot, \cdot] : G \times G \rightarrow G$

$$(g, h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$$

Siccome  $[\cdot, \cdot]|_{G \times \{id\}} = [\cdot, \cdot]|_{\{id\} \times G} \equiv e$ , la differenziale di  $[\cdot, \cdot]$  nell'identità è zero. Possiamo trovare un intorno  $U$  di  $Id \in G$  tale che  $[\cdot, \cdot]|_{U \times U}$  è  $\frac{1}{2}$ -Lipschitziana in ciascuna variabile.

Esiste allora un intorno  $V \subset U$  tale che  $\underbrace{[U, [U, \dots [U, U] \dots]]}_{k \text{ volte}} \subset V$ .

Ora, se  $\Gamma$  è generato da certi elementi  $s_j \in U$ , possiamo scegliere  $V$  tale che  $V \cap \Gamma = \{e\}$  e quindi  $\forall s_1, \dots, s_k, t \in U$  abbiamo che  $[s_1, [s_2, \dots [s_k, t] \dots]] \in V \cap \Gamma = \{e\}$ . Siccome  $\Gamma_k$  è generato da elementi di questo tipo  $\Gamma_k = \{e\}$  e  $\Gamma$  è nilpotente.  
 $[a, bc] = [a, b][b, [a, c]][a, c]$

**Lemma di Margulis** In ogni dimensione  $n \geq 2$  esiste una costante  $\epsilon_n > 0$  tale che  $\forall x \in \mathbb{H}^n$  ogni gruppo discreto  $\Gamma < Isom(\mathbb{H}^n)$  generato da elementi che spostano  $x$  ad una distanza minore di  $\epsilon_n$  è virtualmente nilpotente (ha un sottogruppo normale di indice finito che è nilpotente)

Dim: Per il Lemma precedente esiste un intorno  $U$  di  $Id \in Isom(\mathbb{H}^n)$

talché ogni sottogruppo discreto generato da elementi di  $U$  è nilpotente

Sia  $V_\epsilon = \{ \varphi \in Isom(\mathbb{H}^n) \mid d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x)) < \epsilon \}$ . Al variare di  $\epsilon > 0$



questi insiemi formano un sistema fondamentale di intorni di  $\text{Stab}(x)$ .

Siccome  $|\text{Stab}(x)| \leq O(n)$ , che è compatto, esiste  $m > 0$  tale che  $G_x$  è ricoperto da  $m$  traslati di  $U$ . Scegliamo  $\varepsilon > 0$  in modo che  $V_\varepsilon$  sia contenuto nell'Unione di questi  $m$  traslati. Sia  $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{m}$ .

Supponiamo che un sottogruppo discreto  $\Gamma$  sia generato da elementi  $s_j \in V_{\varepsilon_n}$ . Il sottogruppo  $\Gamma_U$  generato da elementi in  $\Gamma \cap U$  è nilpotente quindi basta mostrare che  $\Gamma_U$  ha indice  $m$  in  $\Gamma$ .

Supponiamo per assurdo che  $[\Gamma : \Gamma_U] > m$ . Sia  $r_i$  il numero di classi laterali rappresentati da elementi di  $\Gamma$  che sono prodotto di al più  $i$  generatori  $s_j$ . Sicuramente  $r_1 > 1$  e se  $r_i = r_{i+1}$  allora  $r_j = r_i \ \forall j \geq i$ .

Quindi  $r_m > m \ \forall m \geq 1$ , per cui ci sono  $m+1$  elementi distinti in  $V_{\varepsilon_n}^m =$

$V_{m\varepsilon_n} = V_\varepsilon$  che appartengono a  $m$  classi laterali diverse. Ne riusciamo a trovare allora due  $g$  ed  $h$  che appartengono allo stesso traslato di  $U$  che ricopre  $V_{\varepsilon_n}$ . Ma allora  $gh^{-1} \in \Gamma \cap U = \Gamma_U$ , contraddicendo il fatto che stiamo in classi laterali diverse.

**Def** La costante di Margulis è la costante  $\varepsilon_n$  per cui vale il Lemma.

Dato  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  discreto indichiamo con  $\Gamma_\varepsilon(x)$  il sottogruppo generato dagli elementi di  $\Gamma$  che muovono  $x$  di al più  $\varepsilon$ . Quindi  $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$  è virtualmente nilpotente.

**Corollario 8.2.2.** Sia  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  un sottogruppo discreto che agisce in modo

libero. Allora per ogni  $x \in \mathbb{H}^n$  il sottogruppo  $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$  è banale o elementare.

Dim: Sia  $H < \Gamma_{\varepsilon_n}(x)$  un sottogruppo nilpotente di indice finito. Se  $H$  è banale allora  $\Gamma$  è finito e quindi è banale (non ha ellittici perché  $\Gamma$  agisce in modo libero e i loxodromici e parabolici hanno ordine infinito). Se  $H$  non è banale allora ha centro non banale e quindi tutti gli elementi di  $H$  hanno gli stessi punti fissi. Siccome  $H$  è discreto,  $H$  è elementare e anche  $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$  è elementare.

### 8.3. Decomposizione thin-thick

Vediamo ora le conseguenze geometriche del Lemma di Margulis. Sia  $\varepsilon_n > 0$  la costante di Margulis. Definiamo  $M_{[\varepsilon_n, \infty)}$  come l'insieme dei punti con raggio di iniettività di almeno  $\frac{\varepsilon_n}{2}$ . Tale insieme si dice parte thick di  $M$ . Le complementare  $M_{[0, \varepsilon_n]} = \overline{M \setminus M_{[\varepsilon_n, \infty)}}$  è detta parte thin.

Teorema 8.3.1 Sia  $M$  una  $n$ -varietà iperbolica completa. La parte thin di  $M$  è l'unione disgiunta di intorni stellati di cuspidi e geodetiche semplici chiuse di lunghezza  $< \varepsilon_n$ .

Dim: Scriviamo  $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ . Per ogni  $\varphi \in \Gamma$  definiamo

$$S_{\varphi}(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x)) \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{H}^n$$

La parte thin  $M_{[0, \varepsilon_n]}$  è il quoziente di

$$S = \{x \in \mathbb{H}^n \mid \exists \varphi \in \Gamma \setminus \{\text{id}\} \quad d_{\mathbb{H}^n}(\varphi(x), x) \leq \varepsilon_n\} = \bigcup_{\varphi \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} S_{\varphi}(\varepsilon_n)$$

$S_{\varphi}(\varepsilon)$  è un intorno stellato centrato in  $p \in \partial_{\infty} \mathbb{H}^n$  se  $\varphi$  è parabolico che fissa  $p$  oppure in una geodetica  $\gamma$  se  $\varphi$  è loxodromica

con asse  $\gamma$ .

Supponiamo che  $x \in S_\varphi(\epsilon_n) \cap S_\psi(\epsilon_n)$ . Per il Lemma di Margulis,  $\varphi, \psi \in \Gamma_{\epsilon_n}(x)$  quindi  $\varphi, \psi$  sono entrambe paraboliche con lo stesso punto fisso oloxodromiche con lo stesso asse. Quindi ogni componente connessa  $S_0 \subset S$  è l'unione di  $S_\varphi(\epsilon_n)$  al variare di  $\varphi$  in un qualche sottogruppo elementare massimale  $\Gamma_0$ .  $S_0$  è l'unione di intorni stellati centrati nello stesso punto  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$  o nella stessa geodetica  $\gamma \subset \mathbb{H}^n$ . Quindi  $S_0$  è stellato.

Il gruppo  $\Gamma$  preserva  $S$  e le isometrie che preservano  $S_0$  sono quelle in  $\Gamma_0$ , quindi  $M_{(0, \epsilon_n]} = S/\Gamma$  è unione di intorni stellati di cuspidi o geodetiche semplici chiuse.

**Corollario 8.3.2** Se  $n \leq 3$  e  $M$  è una  $n$ -varietà iperbolica completa orientata.

Allora  $M_{(0, \epsilon_n]}$  consiste di cuspidi o  $R$ -intorni di geodetiche.

Dim: Basta mostrare che  $S_\varphi(\epsilon)$  è un  $R$ -intorno di una geodetica o una sfera per ogni  $\epsilon > 0$ .

Se  $\varphi$  è loxodromica con asse  $\gamma$ , la quantità  $d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x))$  cresce se  $d_{\mathbb{H}^n}(x, \gamma)$  cresce, quindi  $S_\epsilon(\varphi)$  è un  $R$ -intorno di  $\gamma$  (se non vuoto).

Se  $\varphi$  è parabolica con punto fisso  $p \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$  allora  $\varphi$  agisce come un'isometria di  $\mathbb{R}^{n-1}$  su ogni sfera centrata in  $p$ . Siccome  $n \leq 3$  e  $\varphi$  non ha punti fissi e preserva l'orientazione, la sua azione su una sfera è una traslazione. Quindi  $d_{\mathbb{H}^n}(x, \varphi(x))$  dipende solo

dall'atmosfera a cui  $x$  appartiene e  $S_p(\epsilon)$  è una palla.

**Corollario 8.3.3** Sia  $M$  una  $n$ -varietà iperbolica completa. Le geodetiche chiuse di lunghezza  $< \epsilon_n$  sono semplici e disgiunte.

Dim: Tali geodetiche sono nella parte thin che contengono solo geodetiche semplici chiuse

**Proposizione 8.3.4** Una varietà iperbolica completa ha volume finito se e solo se la sua parte thick è compatta.

Dim: Se la parte thick non è compatta allora esistono infiniti punti a distanza  $\geq \epsilon$  e' uno dall'altro con  $\epsilon < \epsilon_n$ . Palle di raggio  $\frac{\epsilon}{2}$  in questi punti sono embedded, disgiunte e hanno lo stesso volume per cui la varietà ha volume infinito

Se la parte thick è compatta allora ha volume finito. La parte thin è contenuta in un numero finito di palle e  $R$ -intorni di geodetiche che hanno volume finito.

**Corollario 8.3.5** Ogni varietà completa  $M$  di volume finito è omeomorfa alla parte interna di una varietà compatta  $N$  con bordo. Inoltre  $\partial N$  ammette una struttura piatta. In particolare, se  $M$  è orientabile di dimensione 3 allora  $\partial N$  è costituito da tori.

Dim: La parte thick di  $M$  è compatta e la parte thin è costituita da

un numero finito di intorni stellati di cuspidi o geodetiche chiuse, ognuno dei quali con bordo compatto. L'intorno di una cuspidale contiene una cuspidale più piccola  $X \times [0, 1)$  dove  $X$  è una varietà piatta chiusa. Il complementare in  $M$  di queste cuspidi è compatta: è ottenuta dalla parte thick aggiungendo un numero finito di intorni di geodetiche chiuse e una porzione compatta degli intorni delle cuspidi. La varietà  $N$  si ottiene compattificando le cuspidi con  $X \times [0, 1]$ .

### 3. Quasi-isometrie

**Def** Siano  $(X, d_X)$  e  $(Y, d_Y)$  spazi metrici. Diciamo che  $f: X \rightarrow Y$  è una quasi-isometria se esistono costanti  $C_1, C_2 \geq 0$  tali che

$$\frac{1}{C_1} d_X(x_1, x_2) - C_2 \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C_1 d_X(x_1, x_2) + C_2$$

per ogni  $x_1, x_2 \in X$  ed esiste  $C > 0$  tale che  $d_Y(f(x), y) \leq C \quad \forall y \in Y$ .

Diciamo che  $f: X \rightarrow Y$  è una pseudo-isometria se esistono  $C_1, C_2 > 0$  tali che

$$\frac{1}{C_1} d_X(x_1, x_2) - C_2 \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C_1 d_X(x_1, x_2)$$

per ogni  $x_1, x_2 \in X$ .

**Proposizione 3.1** Sia  $f: M \rightarrow N$  un'equivalenza omotopica Riscia tra  $n$ -varietà iperboliche chiuse. Ogni sollevamento  $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  di  $f$  è una pseudo-isometria.

**Dim:** Sia  $g: N \rightarrow M$  l'inversa omotopica di  $f$ . Possiamo scegliere sollevamenti

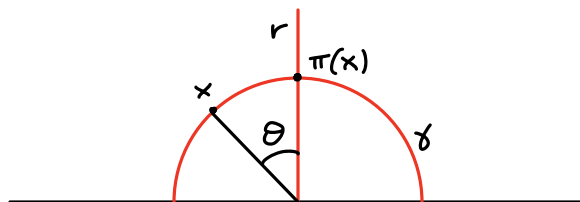
$\tilde{g}$  e  $\tilde{f}$  tali che  $\tilde{g} \circ \tilde{f} = \text{id}_{\mathbb{H}^n}$ . Siccome  $M$  ed  $N$  sono compatte,  $f$  e  $g$  sono  $C_1$ -Lipschitziane. Lo stesso vale per  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$ .

Siccome  $M$  è compatta, l'omotopia tra  $g \circ f$  e  $\text{id}_M$  sposta i punti di al più  $K$ . Lo stesso vale per i sollevamenti  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  per cui

$$d_{\mathbb{H}^n}(x_1, x_2) - 2K \leq d_{\mathbb{H}^n}(\tilde{g}(\tilde{f}(x_1)), \tilde{g}(\tilde{f}(x_2))) \leq C_1 d_{\mathbb{H}^n}(\tilde{f}(x_1), \tilde{f}(x_2))$$

per ogni  $x_1, x_2 \in \mathbb{H}^n$ . Quindi  $\tilde{f}$  è una pseudo-isometria con  $C_2 = \frac{2K}{C_1}$ .

**Lemma 3.2** Nella figura qui in basso  $\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(x, \pi(x))) = \frac{1}{\cos \theta}$ .



Dim: Usiamo il modello del semipiano. A meno di isometrie possiamo supporre che  $\pi(x) = i$ . La geodetica  $r$  è parametrizzata per lunghezza d'arco da  $r(t) = ie^t$ . L'isometria  $\varphi(z) = \frac{z+1}{1-z}$  manda  $r$  in  $\gamma$  e fissa  $i$ , quindi  $\gamma(t) = \frac{ie^t + 1}{1 - ie^t}$  è una parametrizzazione per lunghezza d'arco di  $\gamma$ . Sia  $s = d_{\mathbb{H}^2}(x, \pi(x))$ . Allora  $x = \frac{ie^s + 1}{1 - ie^s}$  e

$$\cos \theta = \operatorname{Im}(x) = \operatorname{Im}\left(\frac{ie^s + 1}{1 - ie^s}\right) = \frac{2e^s}{e^{2s} + 1} = \frac{2}{e^s + e^{-s}} = \frac{1}{\cosh(s)}$$

**Lemma 9.3** Sia  $r \subset \mathbb{H}^n$  una geodetica completa. Sia  $\pi: \mathbb{H}^n \rightarrow r$  la proiezione ortogonale su  $r$ . Allora

$$\sup_{\|v\|=1} \frac{\|d\pi_x(v)\|_{\mathbb{H}^n}}{\|v\|_{\mathbb{H}^n}} = \frac{1}{\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(x, r))}$$

Dim: Dal Lemma precedente  $\cosh(d_{\mathbb{H}^n}(x, r)) = \frac{1}{\cos \theta}$ . Osserviamo che  $T_x \mathbb{H}^n = \operatorname{Ker} \pi_x \oplus U_x$  dove  $U_x$  è la direzione ortogonale a  $\gamma$  in  $x$ . Quindi

$$\sup_{\|v\|=1} \frac{\|d\pi_x(v)\|_{\mathbb{H}^n}}{\|v\|_{\mathbb{H}^n}} = \sup_{\|u\|=1} \frac{\|d\pi_x(u)\|_{\mathbb{H}^n}}{\|u\|_{\mathbb{H}^n}} = \frac{x_n}{\pi(x)_n} = \cos \theta$$

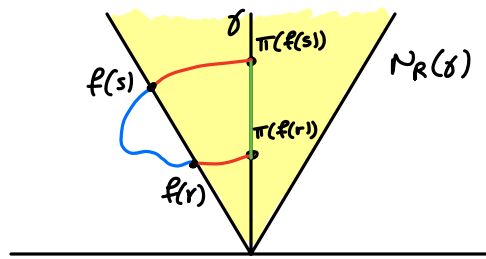
**Lemma 9.4** Sia  $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  una pseudo-isometria. Esiste  $R > 0$  tale che

$$f(\gamma_{pq}) \subset N_R(f(p)f(q))$$

per ogni  $p, q \in \mathbb{H}^n$ , dove  $\gamma_{xy}$  è il segmento geodetico che connette  $x$  e  $y$ .

Dim: Siano  $C_1$  e  $C_2$  le costanti nella definizione di pseudo-isometria.

Fissiamo  $R$  tale che  $\cosh(R) > 2C_1^2$ . Sia  $\gamma$  la geodetica completa che connette  $f(p)$  e  $f(q)$ . Sia  $\gamma_{rs} \subset \gamma_{pq}$  il segmento geodetico massimale tale che  $f(\gamma_{rs})$  è disgiunto dalla parte interna di  $N_R(\gamma)$ .



Siccome  $f$  è  $C_1$ -Lipschitziana, il cammino blu ha lunghezza di al più  $C_1 d_{\mathbb{H}^n}(s, r)$ . Il cammino verde ha lunghezza di al più  $\frac{C_1 d_{\mathbb{H}^n}(r, s)}{\cosh(R)}$ .

Quindi  $d_{\mathbb{H}^n}(f(r), f(s)) \leq \frac{C_1}{\cosh(R)} d_{\mathbb{H}^n}(r, s) + 2R$ . Di conseguenza

$$\frac{1}{C_1} d_{\mathbb{H}^n}(r, s) - C_2 \leq d_{\mathbb{H}^n}(f(r), f(s)) \leq \frac{C_1}{\cosh(R)} d_{\mathbb{H}^n}(r, s) + 2R$$

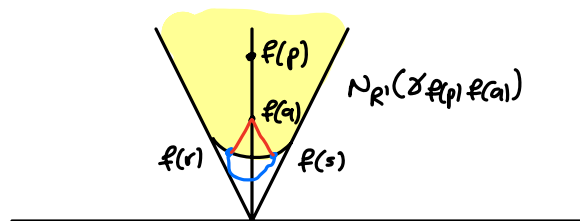
da cui

$$\frac{1}{2C_1} \leq \left( \frac{1}{C_1} - \frac{C_1}{\cosh(R)} \right) d_{\mathbb{H}^n}(r, s) \leq 2R + C_2 \Rightarrow d_{\mathbb{H}^n}(r, s) \leq M$$

per una costante  $M$  dipendente solo da  $C_1$  e  $C_2$ .

Questo mostra che  $f(\gamma_{pq})$  può uscire da  $N_R(\delta)$  solo in sottosegmenti di lunghezza al più  $M$ . Quindi  $f(\gamma_{pq})$  è contenuto interamente in  $N_{R+C_1M}(\delta)$  dato che  $f$  è  $C_1$ -Lipschitz.

Rimane da mostrare che  $f(\gamma_{pq})$  è contenuto in un intorno di  $\delta_{f(p)f(q)}$



$$R' = R + C_1 M$$

$$d_{\mathbb{H}^n}(f(r), f(s)) \leq 2R'$$

Ripetendo lo stesso ragionamento rimpiazzando  $N_R(\delta)$  con  $N_{R'}(\delta_{f(p)f(q)})$

vediamo che  $f(\gamma_{pq})$  rimane al di fuori di  $N_{R'}(\delta_{f(p)f(q)})$  per al più sottosegmenti di  $\gamma_{pq}$  di lunghezza  $2C_1R' + C_1C_2 = M'$  e quindi  $f(\gamma_{pq})$  è interamente contenuto in  $N_{R''}(\delta_{f(p)f(q)})$  con  $R'' = C_1M' + C_2$ .



**Lemma 3.5** Sia  $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  una pseudo-isometria. Esiste  $R > 0$  tale che per ogni  $p \in \mathbb{H}^n$  e ogni raggio geodetico  $\gamma_p$  uscente da  $p$  esiste un'unico raggio geodetico  $\gamma'_{f(p)}$  uscente da  $f(p)$  tale che

$$f(\gamma_p) \subset N_R(\gamma'_{f(p)})$$

Dim: Parametizziamo  $\gamma_p$  per lunghezza d'arco  $\gamma_p: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$  con  $\gamma_p(0) = p$ .

Siccome  $f$  è una pseudo-isometria

$$d_{\mathbb{H}^n}(f(p), f(\gamma(t))) \geq \frac{1}{C_1} d_{\mathbb{H}^n}(p, \gamma(t)) - C_2 \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

Sia  $v_t \in T_{f(p)} \mathbb{H}^n$  il vettore tangente unitario che punta verso  $f(\gamma(t))$

Dal Lemma 3.4, la famiglia  $v_t$  converge per  $t \rightarrow +\infty$  a un vettore

unitario  $v \in T_{f(p)} \mathbb{H}^n$ . Sia  $\gamma'_{f(p)}$  il raggio geodetico uscente da  $f(p)$  e

in direzione  $v$ . Allora  $f(\gamma_p) \subset N_R(\gamma'_{f(p)})$ .

**Proposizione 3.6** Sia  $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  una pseudo-isometria. Allora  $f$  si estende ad una mappa  $\partial f: \partial \mathbb{H}^n \rightarrow \partial \mathbb{H}^n$  iniettiva.

Dim: Ricordiamo che  $\partial \mathbb{H}^n$  consiste nelle classi di equivalenza di raggi geodetici, dove due raggi geodetici sono equivalenti se rimangono a distanza

limitata. Usando le notazioni del Lemma 3.5, definiamo

$$\partial f([\gamma_p]) = [\gamma'_{f(p)}].$$

La mappa è ben definita perché se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$

sono raggi geodetici a distanza limitata allora anche  $\partial f(\gamma_1)$  e

$\partial f(\gamma_2)$  sono a distanza limitata. L'iniettività segue dal fatto che  $f$

è una pseudo-isometria.

**Lemma 3.7** Sia  $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  una pseudo-isometria. Allora esiste  $R > 0$  tale che per ogni geodetica completa  $\gamma$  esiste un'unica geodetica completa  $\gamma'$  tale che  $f(\gamma) \subset N_R(\gamma')$ .

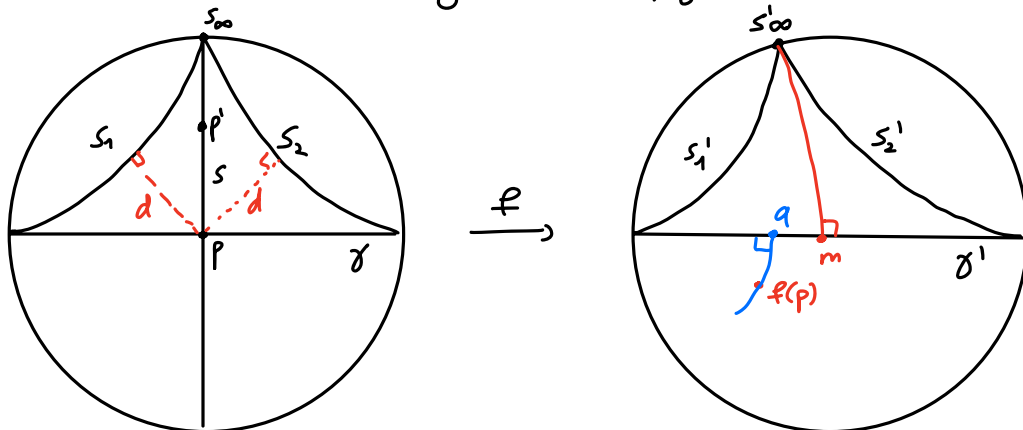
Dim: Parametizziamo  $\gamma$  per lunghezza d'arco  $\gamma: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Tagliando  $\gamma$  in  $\gamma(0)$  otteniamo due raggi geodetici non equivalenti  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ . Sia  $\gamma'$  l'unica geodetica completa asintotica a  $\partial f(\gamma_1)$  e  $\partial f(\gamma_2)$ . Allora per ogni  $t > 0$

$$f(\gamma([-t, +t])) \subset N_R(\gamma_{f(-t)f(t)})$$

per il Lemma 3.4. Facendo tendere  $t \rightarrow +\infty$  si ottiene la tesi.

**Lemma 3.8** Sia  $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  una pseudo-isometria. Esiste  $R > 0$  tale che, per ogni geodetica completa  $\gamma$  e iperpiano totalmente geodetico  $H$  ortogonale a  $\gamma$ , l'immagine  $f(H)$  si proietta ortogonalmente su  $\gamma'$  in un segmento di lunghezza al più  $R$ .

Dim: Sia  $p = \gamma \cap H$  e sia  $s$  una geodetica in  $H$  passante per  $p$ . Sappiamo che esiste  $R > 0$  ed esiste una geodetica  $s' \neq \gamma'$  tale che  $f(s) \subset N_R(s')$ .



Dal Teorema 3.9 la distanza  $d$  tra  $p$  ed  $s_1$  o  $s_2$  è univoca

Per definizione  $\gamma', s', s_1'$  ed  $s_2'$  approssimano  $f(\gamma)$ ,  $f(s)$ ,  $f(s_1)$  e  $f(s_2)$  a meno di un errore pari ad  $R$ . La proiezione  $q$  di  $f(p)$  su  $\gamma'$  è a distanza di al più  $R$  da  $f(p)$ . Quindi,

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}^n}(q, s_1') &\leq d_{\mathbb{H}^n}(q, f(p)) + d_{\mathbb{H}^n}(f(p), s_1') \leq R + d_{\mathbb{H}^n}(f(p), f(s_1)) + d_{\mathbb{H}^n}(f(s_1), s_1') \\ &\leq 2R + C_1 d_{\mathbb{H}^n}(p, s_1) = 2R + C_1 d \end{aligned}$$

e similmente  $d_{\mathbb{H}^n}(q, s_2') \leq 2R + C_1 d$ . Di conseguenza,

$$d_{\mathbb{H}^n}(q, m) \leq d_{\mathbb{H}^n}(q, s_1') + d_{\mathbb{H}^n}(s_1', m) \leq 2R + C_1 d + d \leq 2R + (C_1 + 1)d$$

La proiezione ortogonale su  $\gamma'$  manda allora  $s'$  in un segmento di lunghezza al più  $4R + 2(C_1 + 1)d$ . Siccome  $f(s) \in N_R(s')$  anche la proiezione di  $f(s)$  è un segmento di lunghezza limitata, indipendente da  $s$ .

**Proposizione 3.9** L'estensione  $\bar{f}: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$  è continua

Dim: Sia  $x \in \partial_{\infty} \mathbb{H}^n$  e sia  $\partial f(x)$  la sua immagine. Il punto  $x$  è rappresentato da un raggio geodetico  $\gamma$  e  $\partial f(x)$  da un raggio geodetico  $\gamma'$ .

Sia  $S$  un semispazio ortogonale a  $\gamma'$ . L'immagine  $f(\gamma)$  è a distanza al più  $R$  da  $\gamma'$ , quindi per  $t$  sufficientemente grande  $f(\gamma(t))$  e la sua proiezione su  $\gamma'$  sono contenuti in  $S$  a distanza almeno  $R$  dal bordo di  $S$ . Per il Lemma 3.8, l'immagine  $f(H(t))$  dell'iperpiano totalmente geodetico ortogonale a  $\gamma$  in  $\gamma(t)$  è contenuto in  $S$  per  $t$  grande. Quindi l'intero semispazio con bordo  $H(\gamma(t))$  ha immagine tranne  $f$  contenuta in  $S$ . Questo mostra che  $\bar{f}$  è continua perché questi semispazi formano un sistema fondamentale di intorni di punti di  $\partial_{\infty} \mathbb{H}^n$ . 101

**Teorema 9.10** Sia  $f: M \rightarrow N$  un'equivalenza omotopica liscia tra  $n$ -varietà iperboliche. Allora ogni sollevamento  $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  si estende a una mappa continua  $\bar{f}: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$  la cui restrizione  $\partial_\infty f: \partial_\infty \mathbb{H}^n \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^n$  è un omeomorfismo.

Dim: Sia  $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  un sollevamento di  $f$ . Per il Lemma 9.1,  $\tilde{f}$  è una pseudo-isometria per cui si estende a una  $\bar{f}: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$  continua per il Lemma 9.3. Inoltre la sua restrizione al bordo è iniettiva per la Proposizione 9.6.

Sia  $g$  un'inversa omotopica liscia di  $f$ . L'omotopia tra  $\text{id}_M$  e  $g \circ f$  si solleva a un'omotopia tra  $\text{id}_{\mathbb{H}^n}$  e  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  scegliendo  $\tilde{g}$  sollevamento di  $g$  opportuno. Siccome  $M$  è compatta, questa omotopia muove i punti di al più  $C > 0$ , quindi  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$  si estende all'identità su  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ . Di conseguenza  $\partial_\infty g$  è l'inversa di  $\partial_\infty f$ .

## 10. Teorema di rigidità di Mostow

### 10.1 La funzione di Lobachevsky

La funzione di Lobachevsky è la funzione

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt$$

Osserviamo che  $\Lambda'(\theta) = -\log |2 \sin \theta|$  e  $\Lambda''(\theta) = -\cot(\theta)$ . La funzione di Lobachevsky è dispari perché primitiva di una funzione pari.

**Proposizione 10.1.1** La funzione  $\Lambda$  è  $\pi$ -periodica. Inoltre  $\Lambda(0) = \Lambda(\pi/2) = 0$ .

La funzione  $\Lambda(\theta)$  è positiva se  $\theta \in (0, \pi/2)$ , strettamente negativa se  $\theta \in (\pi/2, \pi)$  e ha un massimo e un minimo assoluto in  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .

Per ogni  $m \in \mathbb{N}$  vale

$$\Lambda(m\theta) = -m \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right)$$

Dim: Calcoliamo

$$\frac{\Lambda(2\theta)}{2} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\theta} \log |2 \sin t| dt = - \int_0^\theta \log |2 \sin 2t| dt$$

$$= - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt - \int_0^\theta \log |2 \sin(t + \pi/2)| dt$$

$$= \Lambda(\theta) - \int_{\pi/2}^{\pi/2 + \theta} \log |2 \sin t| dt = \Lambda(\theta) + \Lambda(\theta + \frac{\pi}{2}) - \Lambda(\frac{\pi}{2})$$

Ponendo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , otteniamo  $\Lambda(\pi) = 0$ . Siccome  $\Lambda'$  è  $\pi$ -periodica e  $\Lambda(\pi) = 0$  anche  $\Lambda$  è  $\pi$ -periodica. Siccome  $\Lambda$  è  $\pi$ -periodica e dispari abbiamo  $\Lambda(\pi/2) = 0$ .

Poiché  $\Lambda''(\theta) = -\cot \theta$  che è strettamente negativa in  $(0, \pi/2)$  e strettamente positiva in  $(\pi/2, \pi)$ , deduciamo che  $\Lambda(\theta) > 0$  se  $\theta \in (0, \pi/2)$

e  $\Lambda(\theta) < 0$  se  $\theta \in (\pi/2, \pi)$ .

Per dimostrare la formula, usiamo una generalizzazione della duplicazione del seno:

$$2\sin(mt) = \prod_{k=0}^{m-1} 2\sin\left(t + \frac{k\pi}{m}\right).$$

Calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda(m\theta)}{m} &= -\frac{1}{m} \int_0^{m\theta} \log |2\sin t| dt = - \int_0^{\theta} \log |2\sin(mt)| dt \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\theta} \log \left| 2\sin\left(t + \frac{k\pi}{m}\right) \right| dt \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \left( \int_0^{\theta + \frac{k\pi}{m}} \log |2\sin t| dt - \int_0^{\frac{k\pi}{m}} \log |2\sin t| dt \right) \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right) + C(m)\end{aligned}$$

dove  $C(m)$  è una costante indipendente da  $\theta$ . Integrando da entrambe

le parti otteniamo

$$\frac{1}{m} \int_0^{\pi} \Lambda(m\theta) d\theta = - \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi} \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right) d\theta + C(m)\pi$$

Siccome  $\Lambda$  è dispari e  $\pi$ -periodica, gli integrali sono nulli, quindi

$C(m) = 0$  e la formula è dimostrata.

## 10.2 Volume dei tetraedri ideali

**Lemma 10.2.1** Siano  $e$  ed  $e'$  lati opposti di un tetraedro ideale  $\Delta \subset \mathbb{H}^3$ .

Allora esiste un'unica geodetica  $r$  ortogonale a  $e$  ed  $e'$ . Inoltre  $\Delta$  è simmetrico rispetto alla rotazione di  $\pi$  attorno ad  $r$ .

Dim:  $e$  ed  $e'$  sono geodetiche ultraparallele di  $\mathbb{H}^3$  quindi  $r$  esiste ed è

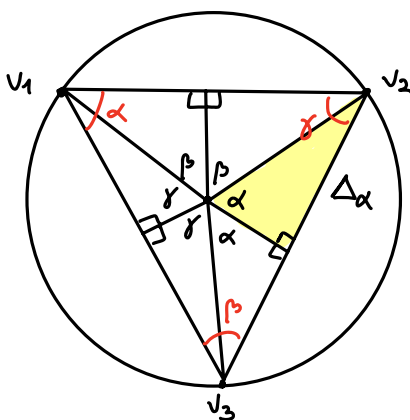
unica. Una rotazione di  $\pi$  attorno ad  $r$  inverte  $e$  ed  $e'$  ma preserva i vertici di  $\Delta$  per cui preserva  $\Delta$ .

Di conseguenza, due lati opposti di un tetraedro ideale  $\Delta \subset \mathbb{H}^3$  hanno gli stessi angoli diedrali. Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli diedrali di  $\Delta$ . Osserviamo che  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  perché un'orosfera centrata in un vertice ideale interseca  $\Delta$  in un triangolo Euclideo di angoli  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Diciamo che  $\Delta$  è regolare se  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

**Teorema 10.2.2** Sia  $\Delta$  un tetraedro ideale con angoli diedrali  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Vale

$$\text{Vol}(\Delta) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

Dim: Nel modello del semispazio possiamo supporre che un vertice ideale sia in  $\infty$  e gli altri vertici  $v_1, v_2, v_3$  si trovino sulla circonferenza unitaria di  $\mathbb{C}$  e formano un triangolo con angoli interni  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Supponiamo che  $O$  appartenga al triangolo, ovvero  $\alpha, \beta, \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ . Decomponiamo il triangolo come in figura



Mostriamo che la parte di tetraedro  $\Delta_\alpha$  sopra il triangolo evidenziato è  $\frac{\Lambda(\alpha)}{2}$ . Questo implica il teorema. Poiché

$$\Delta_\alpha = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \cos \alpha, 0 \leq y \leq x \tan \alpha, \sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Delta_\alpha) &= \int_0^{\cos \alpha} \int_0^{x \tan \alpha} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} \frac{1}{z^3} dz dy dx \\ &= \int_0^{\cos \alpha} \int_0^{x \tan \alpha} \left[ -\frac{1}{2z^2} \right]_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\infty} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} \int_0^{x \tan \alpha} \frac{1}{1-x^2-y^2} dy dx \end{aligned}$$

Per risolvere questo integrale usiamo la relazione

$$\frac{1}{1-x^2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}-y} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+y} \right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\cos \alpha} \int_0^{x \tan \alpha} \frac{1}{1-x^2-y^2} dy dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \left[ -\log(\sqrt{1-x^2}-y) \right]_0^{x \tan \alpha} + \left[ \log(\sqrt{1-x^2}+y) \right]_0^{x \tan \alpha} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\cos \alpha} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( -\log(\sqrt{1-x^2}-x \tan \alpha) + \log(\sqrt{1-x^2}+x \tan \alpha) \right) dx \end{aligned}$$

Sostituendo  $x = \cos t$  otteniamo

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{-\sin t}{\sin t} \left( -\log \frac{\sin t \cos \alpha - \cos t \sin \alpha}{\sin t \cos \alpha + \cos t \sin \alpha} \right) dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\alpha} \log \left( \frac{\sin(t+\alpha)}{\sin(t-\alpha)} \right) dt = -\frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{\alpha} \log \frac{|2 \sin(t+\alpha)|}{|2 \sin(t-\alpha)|} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{2\alpha}^{\pi/2+\alpha} \log |2 \sin t| dt - \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2-\alpha} \log |2 \sin t| dt \\ &= \frac{1}{4} \left( -\Lambda\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \Lambda(2\alpha) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( -\Lambda\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + 2\Lambda(\alpha) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \Lambda\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \right) \\ &= \frac{\Lambda(\alpha)}{2} \end{aligned}$$

Se  $O$  non appartiene al triangolo possiamo decomporre il triangolo analoga-  
mente ma alcuni di questi daranno un contributo negativo ottenendo poi  
la stessa formula.



Corollario 10.2.3 Il tetraedro ideale regolare è il tetraedro ideale di volume massimo in  $\mathbb{H}^3$ .

Dim: Sia  $T = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq \pi\}$ . Consideriamo la funzione

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\pi - \alpha - \beta)$$

che associa ad  $(\alpha, \beta)$  il volume di un tetraedro ideale con angoli diedrali  $\alpha, \beta$  e  $\pi - \alpha - \beta$ .  $f$  è continua, positiva all'interno di  $T$  e nulla al bordo, quindi ammette massimo in un punto interno:

$$\nabla f(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \Lambda'(\alpha) - \Lambda'(\pi - \alpha - \beta) \\ \Lambda'(\beta) - \Lambda'(\pi - \alpha - \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\log |2\sin \alpha| + \log |2\sin(\pi - \alpha - \beta)| \\ -\log |2\sin \beta| + \log |2\sin(\pi - \alpha - \beta)| \end{pmatrix}$$

si annulla se e solo se  $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\beta)$  ovvero se e solo se  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$ .

Questo risultato vale in generale in ogni dimensione

Teorema 10.2.4 L' $n$ -simplesso ideale e regolare in  $\mathbb{H}^n$  ha volume massimo tra tutti gli  $n$ -simplessi ideali.

### 10.3. Teorema di Mostow

Vogliamo dimostrare il seguente risultato

Teorema 10.3.1 Siano  $M$  ed  $N$   $n$ -varietà iperboliche chiuse connesse e orientate con  $n \geq 3$ . Ogni  $f: M \rightarrow N$  equivalenza omotopica è omotopa a un'isometria.

Useremo il seguente risultato:

Teorema 10.3.2 Sia  $M$  una  $n$ -varietà iperbolica chiusa connessa e orientata.

Sia  $v_n$  il volume degli  $n$ -simplessi di  $\mathbb{H}^n$  ideali e regolari. Allora la quantità  $\frac{\text{Vol}(M)}{v_n}$  è un'invariante omotopica, detto volume simpliciale di  $M$ .

Idea della dimostrazione del teorema 10.3.1

Sia  $f: M \rightarrow N$  un'equivalenza omotopica. Per la Proposizione 3.1  $f$  si solleva a una pseudo-isometria  $\tilde{f}: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$  che, per il Teorema 3.10, si estende a una mappa  $\bar{f}: \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$  la cui restrizione al bordo  $\partial_\infty f: \partial_\infty \mathbb{H}^n \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^n$  è un omeomorfismo. Usando la teoria del volume simpliciale si dimostra che  $\partial_\infty f$  manda vertici di un  $n$ -simpleso ideale e regolare nei vertici di un  $n$ -simpleso ideale e regolare. Siano  $v_0, \dots, v_n \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$  vertici di un  $n$ -simpleso ideale e regolare. Esiste un'unica isometria  $\psi \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  tale che  $\psi(v_i) = \partial_\infty f(v_i)$   $\forall i=0, \dots, n$ . Esiste un unico vertice  $v_{n+1} \in \partial_\infty \mathbb{H}^n$  tale che  $v_0, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}$  sono i vertici di un  $n$ -simpleso ideale e regolare. Deduciamo allora che  $\psi(v_{n+1}) = \partial_\infty f(v_{n+1})$ . Continuando in questo modo costruendo  $n$ -simplessi riflettendo lungo una faccia, si ottiene un insieme denso di punti di  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$  in cui  $\partial_\infty f$  e  $\psi$  coincidono. Per continuità  $\partial_\infty f = \psi$ . Se  $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$  e  $N = \mathbb{H}^n / \Gamma'$  allora  $\bar{f} \circ \gamma = f_\#(\gamma) \circ \bar{f} \quad \forall \gamma \in \Gamma$  su  $\overline{\mathbb{H}^n}$ . Quindi  $\psi \circ \gamma = f_\#(\gamma) \circ \psi$  su  $\partial_\infty \mathbb{H}^n$ . Siccome un'isometria è completamente determinato dal suo comportamento al bordo, tale formula vale anche in  $\mathbb{H}^n$ . Quindi  $\psi$  discende a un'isometria  $M \rightarrow N$ .

## 11. Dehn filling iperbolico

**11.1. Dehn filling** Sia  $M$  una 3-varietà il cui bordo è unione disgiunta di tori. Sia  $T \subset \partial M$  una componente torica. Un Dehn filling di  $M$  lungo  $T$  consiste nell'incollare un toro solido  $D^2 \times S^1$  a  $M$  tramite un omeomorfismo  $\varphi: \partial D^2 \times S^1 \rightarrow T$ . La curva chiusa  $\partial D^2 \times \{x\}$  è incollata a una curva semplice chiusa  $\gamma \subset T$ . Il risultato di questa operazione è una 3-varietà  $M^{\text{fill}}$  che ha una componente di bordo in meno rispetto a  $M$ .

Una pendenza su un toro  $T$  è la classe di omotopia di una curva semplice chiusa  $\gamma$  (non orientata) non banale. Se fissiamo generatori  $(m, \ell)$  di  $\pi_1(T) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  allora ogni tale  $\gamma$  si scrive come  $\gamma = \pm (pm + q\ell)$  dove  $(p, q)$  sono interi coprimi. C'è dunque una corrispondenza biunivoca

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{curve semplici chiuse non banali} \\ \text{non orientate in } T \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$
$$\gamma \longmapsto \frac{p}{q}$$

Quindi ogni  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  determina un Dehn filling di  $M$  in cui la curva  $\gamma = \pm (mp + q\ell)$  borda un disco. Nella varietà  $M^{\text{fill}}$  la curva  $\gamma$  risulta omotopicamente banale, per cui diciamo che il Dehn filling di pendenza  $\frac{p}{q}$  uccide  $\gamma$ .

**Esempio 11.1.1**: Gli spazi lenticolari. Sia  $M = D^2 \times S^1$ . Fissiamo generatori di  $\pi_1(\partial M) = \pi_1(T^2)$  in cui  $m = \partial D^2 \times \{y\}$  e  $\ell = \{x\} \times S^1$ . Osserviamo che

$m$  può essere definito intrinsecamente dal fatto che  $e$  è l'unica curva semplice chiusa su  $\partial M$  omotopicamente banale in  $M$ . La curva  $m$  è detta meridiano di  $M$ . La longitudine  $\ell$  non è tipicamente definita in modo intrinseco.

**Def** Lo spazio centicollare  $L(p, q)$  è il risultato del Dehn filling di  $M$  che uccide la curva  $\gamma = qm + p\ell$ .

Quindi, per esempio,  $L(0, 1) \cong S^2 \times S^1$  e  $L(1, 0) \cong S^3$ . Una semplice applicazione del teorema di Van-Kampen ci dice, in generale, che  $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**11.2 Chirurgia di Dehn** Sia  $L \subset S^3$  un link con  $K \geq 0$  componenti. Una chirurgia di Dehn è un Dehn filling del complementare di  $L$ . Consiste dunque di due operazioni:

- 1) La rimozione di un intorno tubolare di  $L$  in modo da creare  $K$  componenti di bordo toriche  $T_1, \dots, T_K$
- 2) l'incollamento di tori solidi  $D^2 \times S^1$  lungo  $\partial D^2 \times S^1$  ad ogni  $T_j$ .

Una chirurgia di Dehn è codificata da numeri razionali  $\frac{p_i}{q_i}$  per ogni componente  $K_i$  di  $L$ . Per esempio gli spazi centicollari  $L(p, q)$  si ottengono dal modo banale in  $S^3$  tramite una  $\frac{p}{q}$ -chirurgia.

**Teorema 11.2.1 [Lickorish-Wallace]** Ogni 3-varietà orientabile compatta si ottiene tramite chirurgia di Dehn lungo un qualche link  $L \subset S^3$ .

**11.3 Completamento di 3-varietà iperboliche** Sia  $N$  una 3-varietà orientata con bordo torico incompressibile. Fissiamo generatori  $m_i$  ed  $\ell_i$  di  $\pi_1(T_i) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  per ogni componente torica  $T_i \subseteq \partial N$ .

**Def** Un parametro di Dehn filling è  $s = (s_1, \dots, s_k)$  dove ogni  $s_i$  è una coppia  $(p, q)$  di interi coprimi o è il simbolo  $\infty$ . È utile pensare a  $s_i \in S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ .

**Oss** Un parametro di Dehn filling  $s$  determina un Dehn filling  $M_s^{\text{fill}}$  di  $N$  nel modo seguente: se  $s_i = \infty$  non facciamo nulla; se  $s_i = (p_i, q_i)$  facciamo un Dehn filling su  $T_i$  che uccide la curva  $p_i m_i + q_i \ell_i$ . Nota che  $M_s^{\text{fill}}$  ha ancora componenti di bordo toriche se qualche  $s_i = \infty$ .

Supponiamo ora che  $N$  sia ottenuta tramite una triangolazione ideale troncata.

Vogliamo descrivere delle equazioni di incollamento e completezza che danno una struttura iperbolica su  $M_s^{\text{fill}}$ . Realizziamo ogni tetraedro  $\Delta_i$  della triangolazione come tetraedro ideale con edge invariant  $z_i = p_i e^{i\theta_i}$  con  $\theta_i \in (0, \pi)$ . Pensiamo a questi parametri come elementi di  $\tilde{\mathcal{C}}^* = \{p e^{i\theta} \mid p > 0, \theta \in \mathbb{R}\}$ . In questo modo le equazioni di incollamento si riducono a

$$\prod_i z(e_i) = e^{2\pi i}$$

dove il prodotto varia su tutti gli spigoli che vengono identificati. Similmente,

per ogni  $\alpha \in \pi_1(T_i)$  non banale pensiamo a  $H(\alpha)$  in  $\tilde{\mathcal{C}}^*$ , che denotiamo

allora con  $\tilde{H}(\alpha)$ . Modifichiamo le equazioni di completezza:

- se  $s_i = \infty$ , teniamo le equazioni  $\tilde{H}(m_i) = \tilde{H}(\ell_i) = 1$
- se  $s_i = (p_i, q_i)$ , consideriamo le equazioni  $\tilde{H}(m_i)^{p_i} \tilde{H}(\ell_i)^{q_i} = e^{2\pi i}$

Vogliamo dimostrare il seguente:

**Teorema 11.3.1** Una soluzione delle equazioni di incollamento e completezza

modificate descrivono una metrica iperbolica incompleta su  $M$  e il completamento

$\bar{M}$  e' una 3-varietà iperbolica completa omeomorfa a  $M_S^{ell}$ .

Iniziamo a studiare il completamento del rivestimento universale  $\pi: X \rightarrow \mathbb{H}^3/\gamma$

dove  $\gamma$  e' una geodetica completa. A meno di isometrie possiamo supporre

che  $\gamma$  sia la geodetica passante per 0 e  $\infty$  nel modello del semispazio

per cui  $\mathbb{H}^3/\gamma = \mathbb{C}^* \times \mathbb{R}^+$  e  $X = \tilde{\mathbb{C}}^* \times \mathbb{R}^+$ . La metrica su  $X$  e' determi-

nata dal fatto che  $\pi$  e' un' isometria locale e gli automorfismi del rive-

stimento sono isometrie di  $X$ . Il completamento  $\bar{X}$  di  $X$  si ottiene

aggiungendo una copia  $\tilde{\gamma}$  di  $\gamma$ . Notiamo che gli elementi di  $\tilde{\mathbb{C}}^*$  agiscono

per isometria su  $X$  nel modo seguente:

$$w \in \tilde{\mathbb{C}}^* \quad \varphi_w(z, t) = (wz, |w|t)$$

Se  $w = e^{i\alpha}$ , allora  $\pi \circ \varphi_w$  e' una rotazione di angolo  $\alpha$  attorno a  $\gamma$ ;

se  $w = \lambda e^{i\alpha}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , allora  $\pi \circ \varphi_w$  e' un' isometrialoxodromica di  $\mathbb{H}^3$

con asse  $\gamma$  e distanza di traslazione  $d(\varphi_w) = \log(\lambda)$ .

Sia  $\Gamma < \tilde{\mathbb{C}}^* \cong \mathbb{C}$  un sottogruppo discreto isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Distinguiamo

due casi:

1)  $\Gamma$  contiene una rotazione non banale. Allora  $\Gamma$  e' generato da

mappe del tipo  $(z, t) \mapsto (e^{i\alpha}z, t)$  e  $(z, t) \mapsto e^\lambda(e^{i\beta}z, t)$

con  $\lambda \neq 0$ . In questo caso  $\Gamma$  agisce su  $\tilde{\gamma}$  per traslazione di  $\lambda$ .

Il quoziente  $\bar{X}/\Gamma$  e' una varietà iperbolica completa con singolarità

coniche: e' omeomorfa a  $B^2 \times S^1$  e il cuore e' la proiezione 112

ne di  $\tilde{Y}$  ed  $e$  è una geodica di lunghezza  $|\lambda|$  in cui i dischi ortogonali hanno angolo giro di misura  $\alpha$ . (Se  $\alpha = 2\pi$ , non ci sono singolarità).

2)  $\Gamma$  non contiene rotazioni. Allora  $\Gamma$  agisce su  $\tilde{Y}$  come un sottogruppo non discreto di traslazioni e  $\bar{X}/\Gamma$  non è neppure Hausdorff.

Il completamento di  $X/\Gamma$  si ottiene aggiungendo un unico punto.

Sia  $M$  una 3-varietà iperbolica orientabile non completa e di volume finito ottenuta incollando tetraedri ideali. Sia  $N$  la varietà con bordo torico ottenuta rimuovendo un interno dei tetraedri ideali. Sia  $T \subset \partial N$  un toro di bordo. Sia  $C(T) \subset M$  un collare di  $T$ . Per il Lemma 6.3.4, nel caso di metriche complete  $C(T)$  è isometrica ad una cuspidale troncata, ovvero al quoziente di un'oropalla per l'azione di un sottogruppo di isometrie paraboliche di  $\mathbb{H}^3$  che agisce per traslazioni sulle orosfere.

Se la metrica su  $M$  non è completa, possiamo comunque costruire una mappa sviluppante dev:  $\tilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$  mandando ciascun tetraedro della triangolazione indotta su  $\tilde{M}$  in un tetraedro ideale in  $\mathbb{H}^3$  a cui isometrico.

Siccome la metrica su  $\tilde{M}$  non è completa, però, la mappa sviluppante non è, in generale, né iniettiva né surgettiva. Abbiamo comunque una rappresentazione di omonomia  $hol: \pi_1(M) \rightarrow \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ . Il  $\pi_1(T) \subset \pi_1(M)$  determina allora un sottogruppo  $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  che fissa un punto in  $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ . Possiamo supporre che tale punto fisso sia  $\infty$ .

Gli elementi di  $\Gamma$  sono allora della forma  $z \mapsto az + b$  con  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Ci sono solo due possibilità:

- $\Gamma$  consiste di sole traslazioni
- $\Gamma$  fissa un punto  $p \in \mathbb{C}$ , che possiamo supporre sia  $p=0$ .

Per il Lemma 6.3.4 sappiamo che la parte lineare di  $\tau_\alpha \in \Gamma$  coincide con  $H(\alpha)$  per ogni  $\alpha \in \pi_1(T)$  e nel primo caso la metrica in un intorno di  $T$  è completa. Nel secondo caso,  $\Gamma$  è costituito da trasformazioni di Möbius del tipo  $z \mapsto az$ , che inducono isometrie Coxeteriane se  $|a| \neq 1$  ed ellittiche se  $|a| = 1$ . In ogni caso  $\Gamma$  preserva la geodetica completa  $\gamma$  passante per 0 e  $\infty$ . Supponiamo di essere in questo secondo caso, dato che siamo interessati ai tori di bordo in un cui intorno la metrica non è completa. Possiamo costruire la mappa sviluppante  $D: \tilde{T} \rightarrow \mathbb{C}$  equivariante per l'olonomia  $\rho(\pi_1(T)) = \langle az, bz \rangle$   $a, b \in \mathbb{C}^*$  mandando ogni triangolo della triangolazione indotta su  $T$  in un triangolo in  $\mathbb{C}$  con gli stessi angoli interni. D'altra parte esiste un biolomorfismo  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \tilde{T}$  tale che gli automorfismi del rivestimento di  $\tilde{T}$  sono  $z \mapsto z+1$  e  $z \mapsto z+\mu$  per qualche  $\mu \in \mathbb{H}^2$ . La mappa  $d = D \circ \varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  soddisfa  $d(z+1) = ad(z)$  e  $d(z+\mu) = bd(z)$ . Ma allora  $f(z) = \frac{d''(z)}{d'(z)} = c$  costante. Osserviamo che  $c \neq 0$  perché altrimenti  $d(z) = az + b$  e  $a=b=1$ ; per cui  $c \neq 0$  e  $d(z) = \frac{1}{c} e^{cz}$ . Inoltre  $a = e^c$  e  $b = e^{c\mu}$ . In particolare,  $\text{Im}(D) = \mathbb{C}^*$  e  $\rho(\pi_1(T)) = \langle az, bz \rangle = \langle H(m), H(l) \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ed è discreto, dove  $m$  ed  $l$  sono generatori di  $\pi_1(T)$ .

Deduciamo che la mappa sviluppante  $D: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{H}^3$  ha immagine contenuta 114



in  $H^3 \setminus \ell$  e quindi può essere sollevata a  $\tilde{D}: \tilde{M} \rightarrow X$ . Inoltre esiste  $R > 0$  sufficientemente piccolo tale che, se  $N_R(\tilde{\gamma})$  denota un cono solido di ampiezza  $R$  attorno a  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{D}: \tilde{C}(T) \rightarrow N_R(\tilde{\gamma}) \setminus \tilde{\gamma}$  è una bigezione equivariante per il sottogruppo generato da  $\tilde{H}(m)$  e  $\tilde{H}(l)$ . Quindi  $\tilde{C}(T)$  è isometrico a  $(N_R(\tilde{\gamma}) \setminus \tilde{\gamma}) / \langle \tilde{H}(m), \tilde{H}(l) \rangle$ .

**Corollario 11.3.2** Se  $\text{Im } \tilde{H}$  contiene una rotazione allora ci sono generatori  $\gamma, \kappa \in \pi_1(T)$  tali che  $\tilde{H}(\gamma) = e^{i\alpha}$  e  $\tilde{H}(\kappa) = e^{\lambda + i\beta}$  con  $\lambda \neq 0$  e il completamento  $\overline{\tilde{C}(T)}$  è isometrico a un troncamento di  $X/\text{Im } \tilde{H}$  ed è quindi omeomorfo a un toro solido il cui cuore è una geodetica di lunghezza  $|\lambda|$  con singolarità coniche di ampiezza  $\alpha$ . Attrimenti  $\overline{\tilde{C}(T)} = \tilde{C}(T) \cup \{pt\}$ .

Dim: Siccome  $\text{Im } \tilde{H} = \Gamma < \tilde{\mathcal{L}}^*$  discreto e isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , possiamo applicare la discussione fatta circa il completamento di  $X/\Gamma$ . Siccome  $\tilde{C}(T)$  è isometrico ad un suo troncamento, la stessa conclusione vale per  $\overline{\tilde{C}(T)}$ .

Notiamo, in particolare, che  $\overline{\tilde{C}(T)}$  è omeomorfo al beam-fitting che uccide la curva  $\gamma$ , se  $\text{Im } \tilde{H}$  contiene una rotazione.

Dim del Teorema 11.3.1: Se  $M$  è ottenuta risolvendo le equazioni di irrotamento e completezza modificate, allora ogni cella  $\tilde{C}(T)$  è completo (se  $\tilde{H}(\alpha) = \tilde{H}(\beta) = 1$  per  $\alpha, \beta \in \pi_1(T)$  generatori), oppure  $\tilde{C}(T)$  è isometrico al troncamento  $X/\text{Im } \tilde{H}$ . L'equazione  $\tilde{H}(m)^p \tilde{H}(l)^q = e^{2\pi i}$

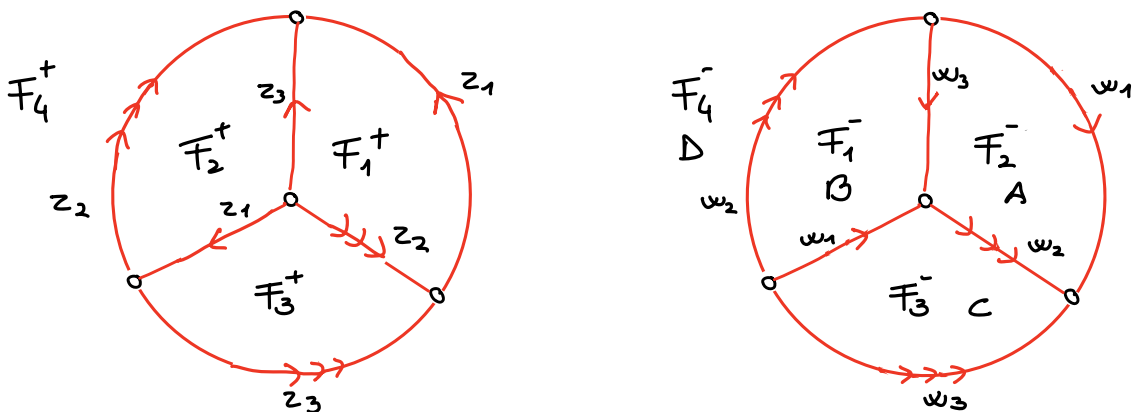
implica che  $\text{Im } \tilde{H}$  contiene una rotazione per  $\omega_i$  ( $\overline{CT}$ ) e' omeomorfo al Dehn filling che uccide la curva  $p m_i + q l_i$ . Quindi:  $\bar{M}$  e' omeomorfa a  $M_S^{\text{fill}}$  e non ha singolarita' perche'  $\alpha = 2\pi$ .

**Teorema 11.4.1** Sia  $M$  il complementare di un link iperbolico  $L \subset S^3$ , ovvero  $M = S^3 \setminus L$  ammette una metrica iperbolica completa di volume finito, con  $h$  componenti. Allora esiste un intorno  $U$  di  $(\infty, \dots, \infty) \in (S^2)^h$  tale che, per ogni parametro di Dehn filling  $s \in U$ , la varieta'  $M_s^{\text{fill}}$  ammette una metrica iperbolica completa.

**Corollario 11.4.2** Esiste un insieme finito  $S_i$  di pendenze tale che per ogni parametro di Dehn filling  $s = (s_1, \dots, s_h)$  con  $s_i \notin S_i$  la varieta'  $M_s^{\text{fill}}$  ammette una metrica iperbolica completa.

Dimostrazione del Teorema 11.4.1 per il complementare del nodo a figura 8

Ricordiamo che il complementare  $M$  del nodo a figura 8 si ottiene incollando due tetraedri ideali secondo lo schema seguente:



Gei: edge invariant  $z_1 = z, z_2 = \frac{1}{1-z}, z_3 = \frac{z-1}{z}$  e  $w_1 = w, w_2 = \frac{1}{1-w}, w_3 = \frac{w-1}{w}$  forniscono una metrica iperbolica (non necessariamente completa) su  $M$  se e solo se  $z(1-z)w(1-w) = 1$ . Questo equivale a dire che, fissato

$w$  con  $\operatorname{Im}(w) > 0$ ,  $z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4/w(1-w)}}{2}$  dove il segno della radice è determinato dalla condizione che  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . Si deduce, in particolare, che  $1 - \frac{4}{w(1-w)} \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$  che equivale a  $w \in \mathbb{H}^2 \setminus r$  dove  $r$  è la semiretta  $r = \frac{1}{2} + iy$  con  $y \geq \frac{\sqrt{15}}{2}$ . Ogni elemento in  $R = \mathbb{H}^2 \setminus r$  determina allora una struttura iperbolica su  $M$ . Quella completa è  $w_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Abbiamo inoltre già calcolato che per generatori  $\alpha, \beta \in \pi_1(T^2)$  abbiamo

$$\tilde{H}(\alpha) = w(1-z) \quad \tilde{H}(\beta) = \frac{z^2}{w^2}$$

Conviene scegliere i generatori  $m = \alpha$  e  $\ell = \beta + 2\alpha$ . Allora

$$\tilde{H}(m) = w(1-z) \quad \tilde{H}(\ell) = z^2(1-z)^2$$

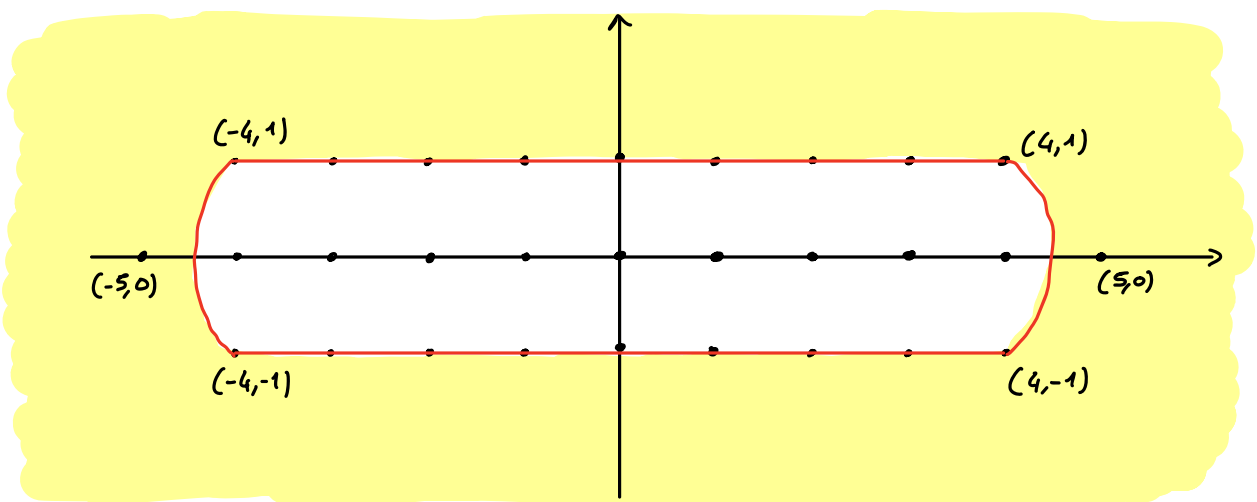
Definiamo la mappa  $d: R \rightarrow S^2$  definita come

- $d(w_0) = \infty$
- $d(w) = (p, q)$  tale che  $\tilde{H}(m)^p \tilde{H}(\ell)^q = e^{2\pi i}$   $w \neq w_0$  (\*)

La regione  $R$  ha un' involuzione

- $\tau(w) = z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4/w(1-w)}}{2}$ . Tale involuzione manda  $\tilde{H}(m)$  in  $\tilde{H}(m)^{-1}$  e  $\tilde{H}(\ell)$  in  $\tilde{H}(\ell)^{-1}$  per cui  $d(\tau(w)) = -d(w)$ .

Mostriamo che l'immagine di  $d$  è la regione evidenziata in figura



Se  $w$  tende a un punto di  $[1, +\infty]$  allora  $z$  tende a un punto in  $[-\infty, 0]$ . Quindi gli argomenti di  $z, w$  e  $1-z$  tendono verso  $0, \pi$  e  $0$  rispettivamente per cui  $q \rightarrow 1$ .

Se  $w \rightarrow 1$  allora  $z \rightarrow -\infty$ . Dall'equazione (\*) ricaviamo che  $(p, q) \rightarrow (-4, 1)$ . Se  $w \rightarrow +\infty$  allora  $z \rightarrow 0$  e l'equazione  $z(1-z)w(1-w)=1$  implica che  $|z||w|^2 \rightarrow 1$ . Da (\*) ricaviamo che  $|w|^{p-4q} \rightarrow 1$  per cui  $p-4q \rightarrow 0$  e  $(p, q) \rightarrow (4, 1)$ . Quindi  $d([1, +\infty]) = \overline{(-4, 1)(4, 1)}$ .

Usando l'involuzione  $\tau$  deduciamo che  $d([-\infty, 0]) = \overline{(4, 1)(-4, -1)}$ .

Se  $w$  tende a un punto di  $r$  da destra allora  $z$  tende a un punto del segmento  $[0, \frac{1}{2}]$ . Quindi gli argomenti di  $z$  e  $1-z$  tendono a  $0$  e (\*) implica che l'argomento di  $w^p$  tende a  $2\pi$ . Se  $w \in s$ ,  $\arg(w) \geq \arctg(\sqrt{15})$  per cui  $p \leq \frac{2\pi}{\arctg(\sqrt{15})} < 5$ . Deduciamo allora che possiamo connettere  $(4, 1)$  e  $(4, -1)$  con una curva come in figura restando nell'immagine di  $d$ . Il ragionamento è analogo se  $w$  tende a un punto di  $r$  da sinistra e si ottiene una curva che connette  $(-4, 1)$  e  $(-4, -1)$  come in figura.

Possiamo ora concludere la dimostrazione del teorema. Sia  $U = \text{Im}(d)$ .

Per ogni  $s = (p, q) \in U$  parametro di Dehn filling, la struttura iperbolica di parametro  $w_s = d^{-1}(s)$  non è completa e il suo completamento è omeomorfo a  $M_s^{\text{fill}}$

